

多層床スラブの簡易解析システムの開発 (その1) 解析理論とその評価

森 下 真 行 斉 藤 芳 人

要 旨

現在、床振動の簡易解析システムとして、Rayleigh-Ritz法による矩形平板の解析法が既に開発されている。しかし、これは対象とする床スラブとは異なる階に外力が作用する場合や間柱等により上下階床が連結された場合等、多層間の振動伝搬や連成効果は考慮されていない。本報では、そのような単層床スラブの解析法を発展させた多層床スラブの簡易解析法の定式化を示すと共に、その有効性および実用性を検証した。以下に得られた結果を示す。

- (1) 静的たわみおよび固有値解析結果について、本手法と有限要素法とを比較した結果、両者は良く対応していることを確認した。
 - (2) 実測により得られた固有振動数および応答波形を本手法による解と比較した結果、その傾向は概ね捉えていることを確認した。
- 以上より、本解析法は、多層床スラブの簡易解析法として十分実用的なレベルにあることが分かった。

キーワード 床振動／多層床スラブ／Rayleigh-Ritz法／振動解析／有限要素法／実測結果

目 次

- | | |
|--------------|-------------|
| 1. はじめに | 4. 実測結果との比較 |
| 2. 解析理論 | 5. まとめ |
| 3. 有限要素法との比較 | 6. おわりに |

Simplified Static and Vibration Analysis for Multi-Floor (Part.1) Theory and Estimation

Tadayuki MORISHITA Yoshihito SAITO

Synopsis:

This paper presents the theory of a simplified static and dynamic analysis with the Rayleigh-Ritz method for multi-floor. This method enables to estimate the characteristics of propagation and interaction between the upper floor and the lower one. The results of this method were compared with these of FEM and observation in order to verify the practicability of the method.

The results were obtained as follows.

- (1) It was confirmed that the results of static and eigenvalue analysis by this method agreed well with those of the FEM.
- (2) It was confirmed that the natural frequencies and the response waves calculated by this method corresponded well with those measured.

Considering the facts above, it is concluded that the proposed method is sufficiently practical for vibration analysis of multi-floor.

1. はじめに

床振動の簡易解析システムとして、Rayleigh-Ritz 法による矩形平板の解析法が加藤ら^{1) 2)}により開発されている。しかし、これは単層床スラブを対象に開発された手法であり、対象とする床スラブとは異なる階に外力が作用する場合や間柱等により上下階床が連結された場合等、多層間の振動伝搬や連成効果は考慮されていない。

本報告は、Rayleigh-Ritz 法を用いた上記単層床スラブの解析法を発展させた多層床スラブの解析法に関して述べる。まず、本手法の定式化を示し、さらに、本手法を有限要素法および実測結果と比較することで、本手法の有効性を検証する。

2. 解析理論

2.1 多層床スラブのモデル化

材料の直交異方性を考慮した単層床スラブを、曲げ及びねじり剛性を考慮した梁で補強した梁付き床スラブ¹⁾²⁾を考える。次にこれらを軸剛性および曲げ剛性を考慮した柱で繋ぐことで多層床スラブをモデル化する。但し、最下層の柱のみ柱下端は固定端と仮定する。解析モデルの概要を図-1 に示す。

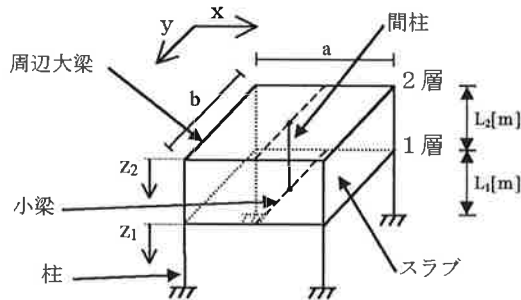


図-1 解析モデル概念図

2.2 ひずみエネルギー

多層床スラブモデルに対して、最大ひずみエネルギー U は次式で表される。

$$U = \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left({}_eD_x \cdot {}_e w_{,xx}^2 + {}_eD_y \cdot {}_e w_{,yy}^2 + 2 {}_eD_{xy} \cdot {}_e w_{,xy}^2 + 4 {}_eD_{xy} \cdot {}_e w_{,xy}^2 \right) dy dx \right\} \quad (\text{矩形平板による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1} \left({}_eE_p \cdot {}_eI_p \int_0^b {}_e w_{,x}^2 \Big|_{x={}_e x_p} dy + {}_eG_p \cdot {}_eJ_p \int_0^b {}_e w_{,xy}^2 \Big|_{x={}_e x_p} dy \right) \right\} \quad (\text{y 軸方向梁による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{q=1} \left({}_eE_q \cdot {}_eI_q \int_0^a {}_e w_{,y}^2 \Big|_{y={}_e y_q} dx + {}_eG_q \cdot {}_eJ_q \int_0^a {}_e w_{,xy}^2 \Big|_{y={}_e y_q} dx \right) \right\} \quad (\text{x 軸方向梁による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} {}_eR_A \int_0^b {}_e w_{,x}^2 \Big|_{x=0} dy + \frac{1}{2} {}_eR_B \int_0^b {}_e w_{,x}^2 \Big|_{x=a} dy \right\} \quad (\text{y 軸方向境界による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} {}_eR_C \int_0^a {}_e w_{,y}^2 \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2} {}_eR_D \int_0^a {}_e w_{,y}^2 \Big|_{y=b} dx \right\} \quad (\text{x 軸方向境界による})$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{{}_eE_c \cdot {}_eA_c}{{}_eL} \cdot \left({}_e w \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} - {}_{e-1} w \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \right)^2 \right\} \quad (\text{柱の軸剛性による})$$

$$+ 2 \frac{{}_eE_c \cdot {}_eI_{cx}}{{}_eL} \cdot \left({}_{e-1} w_{,y}^2 \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} + {}_{e-1} w_{,y} \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \cdot {}_e w_{,y} \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} + {}_e w_{,y}^2 \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \right)$$

(柱の x 軸回りの曲げ剛性による)

$$+ 2 \frac{{}_eE_c \cdot {}_eI_{cy}}{{}_eL} \cdot \left({}_{e-1} w_{,x}^2 \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} + {}_{e-1} w_{,x} \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \cdot {}_e w_{,x} \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} + {}_e w_{,x}^2 \Big|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \right) \quad (\text{柱の y 軸回りの曲げ剛性による})$$

[1]

ここに、左下添字 e は層番号を、右下添字 c, p, q はそれぞれ第 c 番目の柱、 y 軸に平行な第 p 番目の梁、 x 軸に平行な第 q 番目の梁を示している。また、 ${}_eD_x, {}_eD_y, {}_eD_{xy}$ は e 層直交異方性板の曲げ剛性を、 ${}_e\nu_x$ は e 層直交異方性板の x 軸方向ポアソン比を示す。梁は y, x 軸にそれぞれ平行に配置される。 y 軸に平行な梁は $x = {}_e x_p$ 線上に配置され曲げ剛性 ${}_eE_p \cdot {}_eI_p$ 、ねじり剛性 ${}_eG_p \cdot {}_eJ_p$ を持つ。同様に x 軸に平行な梁は $y = {}_e y_q$ 線上に配置され、曲げ剛性 ${}_eE_q \cdot {}_eI_q$ 、ねじり剛性 ${}_eG_q \cdot {}_eJ_q$ を持つ。 ${}_eR_A, {}_eR_B, {}_eR_C, {}_eR_D$ はそれぞれ e 層境界 $A(x=0), B(x=a), C(y=0), D(y=b)$ 下の一様な回転バネ剛性である。柱は座標 $({}_e x_c, {}_e y_c)$ で上下 2 層間を連結しており、ヤング係数 ${}_eE_c$ 、断面積 ${}_eA_c$ 、 x, y 軸に関する断面二次モーメント ${}_eI_{cx}, {}_eI_{cy}$ を持つ。また、 ${}_eL$ は e 層の階高を、 ${}_e w \Big|_{(x,y)}$ は座標 (x, y) における e 層床スラブのたわみを、 ${}_e w \Big|_{x=s}$ は y 軸に平行な梁 ($x=s$) 上の任意点でのたわみを示している。なお、記号 ${}_e w_{,s}$ は、 e 層床スラブのたわみ ${}_e w$ に対する s 方向の微分を、記号 ${}_e w_{,st}$ は、 e 層床スラブのたわみ ${}_e w$ に対する s 方向の微分後さらに t 方向の微分を意味する。

2.3 運動エネルギー

同様に多層床スラブモデルに対する運動エネルギー T は次式で表される。

$$T = \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} ({}_e\rho_e h + {}_e m_0) \omega^2 \int_0^a \int_0^b {}_e w^2 dy dx \right\} \quad (\text{矩形平板による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1} {}_e\rho_p \cdot {}_e A_p \cdot \omega^2 \int_0^b {}_e w^2 \Big|_{x={}_e x_p} dy \right\} \quad (\text{y 軸方向梁による})$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{q=1} {}_e\rho_q \cdot {}_eA_q \cdot \omega^2 \int_0^a {}_eW^2 \Big|_{y={}_ey_q} dx \right\} \\
& \quad \text{(x 軸方向梁による)} \\
& + \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 {}_e\rho_c \cdot {}_eA_c \cdot {}_eL \left[\frac{1}{2} ({}_eW \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} + {}_{e-1}W \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)}) \right]^2 \right\} \\
& \quad \text{(柱の軸変形による)} \\
& + \frac{1}{420} \omega^2 {}_e\rho_c \cdot {}_eA_c \cdot {}_eL^3 (2 {}_{e-1}W_y^2 \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} \\
& \quad - 3 {}_{e-1}W_{,y} \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} \cdot {}_eW_{,y} \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} + 2 {}_eW_y^2 \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)}) \\
& \quad \text{(柱の x 軸回りの曲げ変形による)} \\
& + \frac{1}{420} \omega^2 {}_e\rho_c \cdot {}_eA_c \cdot {}_eL^3 (2 {}_{e-1}W_x^2 \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} \\
& \quad - 3 {}_{e-1}W_{,x} \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} \cdot {}_eW_{,x} \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)} + 2 {}_eW_x^2 \Big|_{({}_ex_c, {}_ey_c)}) \Big\} \\
& \quad \text{(柱の y 軸回りの曲げ変形による)} \\
& \quad \quad \quad [2]
\end{aligned}$$

ここに、 ω は円振動数を、 ${}_eh$ は e 層床スラブ厚を、 ${}_e\rho$ 、 ${}_e\rho_c$ 、 ${}_e\rho_p$ 、 ${}_e\rho_q$ はそれぞれ e 層の床スラブ、柱および y 、 x 軸方向梁の密度を示す。 ${}_em_0$ は e 層の床にかかる自重以外の単位面積あたりの等分布質量である。また、 ${}_eA_p$ 、 ${}_eA_q$ はそれぞれ e 層 y 、 x 軸方向の梁の断面積を示す。

2.4 外力によるエネルギー

外力のなす仕事 (エネルギー) は次式のように表現できる。

$$W = \sum_{e=1} \sum_{i=1} {}_eP_i \cdot {}_eW \Big|_{({}_ex_i, {}_ey_i)} + \sum_{e=1} \int_0^a \int_0^b {}_eP_0 \cdot {}_eW \Big|_{(x,y)} dy dx \quad [3]$$

ここに、 ${}_eP_i$ は e 層 i 番目の集中荷重、 $({}_ex_i, {}_ey_i)$ は集中荷重の作用位置、 ${}_eP_0$ は e 層に作用する単位面積あたりの荷重である。

2.5 Rayleigh-Ritz 法

各層床スラブのたわみを次のように定義する。

$${}_eW(x,y) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} {}_eW_{mn} \cdot {}_ef_{xm}(x) \cdot {}_ef_{yn}(y) \quad [4]$$

ただし、 ${}_eW_{mn}$ は未定係数であり、 ${}_ef_{xm}(x)$ 、 ${}_ef_{yn}(y)$ はそれぞれ e 層における x 軸方向、 y 軸方向の形状関数である。以下にここで用いる x 軸方向の形状関数 (梁関数) を示す。

$$\begin{aligned}
{}_ef_{xm}(x) = & {}_eC_{1m} \left(\sin \frac{{}_e\lambda_m \cdot x}{a} \right) + {}_eC_{2m} \left(\cos \frac{{}_e\lambda_m \cdot x}{a} \right) \\
& + {}_eC_{3m} \left(\sinh \frac{{}_e\lambda_m \cdot x}{a} \right) + {}_eC_{4m} \left(\cosh \frac{{}_e\lambda_m \cdot x}{a} \right)
\end{aligned} \quad [5]$$

ここに、 ${}_e\lambda_m$ 、 ${}_eC_{1m}$ 、 ${}_eC_{2m}$ 、 ${}_eC_{3m}$ 、 ${}_eC_{4m}$ は未定係数であり、 e 層の境界条件を満足するように ${}_e\lambda$ を少しずつ変化させながら収束計算により解を決定する。 y 軸方向の形状関数についても同様である。なお、 m, n はそれぞれ x, y 軸方向の級数の項数を示しており、これを大きくとることでより複雑な (高次の) 変形 (モード形状) を表現できるが、その分計算時間が長くなる性質のものである。

式 [4] を式 [1] [2] [3] にそれぞれ代入し、さらに未定係数 ${}_eW_{mn}$ に対して、全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - T - W$ が停留する条件 (エネルギー最小の原理) から次式が成立する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial {}_eW_{mn}} = \frac{\partial U}{\partial {}_eW_{mn}} - \frac{\partial T}{\partial {}_eW_{mn}} - \frac{\partial W}{\partial {}_eW_{mn}} = 0 \quad [6]$$

式 [6] が成立するように、未定係数 ${}_eW_{mn}$ を決定する。

2.6 静的解析

静的解析では、式 [6] において運動エネルギー T を無視する。式 [6] よりマトリクス表示を用いて式 [7] を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & & & & 0 \\ & K_{e-1,e} & & & \\ & K_{e,e-1} & K_{e,e} & & \\ & & & K_{r-1,r} & \\ 0 & & & K_{r,r-1} & K_{r,r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1W_{mn} \\ \vdots \\ {}_eW_{mn} \\ \vdots \\ {}_rW_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}_1P_{mn} \\ \vdots \\ {}_eP_{mn} \\ \vdots \\ {}_rP_{mn} \end{Bmatrix} \quad [7]$$

以下に、剛性マトリクスの対角項 $K_{e,e}$ 、連成項 $K_{e-1,e}$ および荷重項 ${}_eP_{mn}$ をそれぞれ示す。

$$\begin{aligned}
K_{e,e} = & {}_eD_x \cdot F_{xemi}^{(2,2)} F_{yenj}^{(0,0)} + {}_eD_y \cdot F_{xemi}^{(0,0)} F_{yenj}^{(2,2)} \\
& + 2 {}_eD_y \cdot {}_e\nu_x \left(F_{xemi}^{(2,0)} F_{yenj}^{(0,2)} + F_{xemi}^{(0,2)} F_{yenj}^{(2,0)} \right) \\
& + 4 {}_eD_{xy} F_{xemi}^{(1,1)} F_{yenj}^{(1,1)} \\
& + \sum_{p=1} \left({}_eE_p \cdot {}_eI_p \cdot E_{expmi}^{(0,0)(e,e)} F_{yenj}^{(2,2)} + {}_eG_p \cdot {}_eJ_p \cdot E_{expmi}^{(1,1)(e,e)} F_{yenj}^{(1,1)} \right) \\
& + \sum_{q=1} \left({}_eE_q \cdot {}_eI_q \cdot F_{xemi}^{(2,2)} E_{eyqnj}^{(0,0)(e,e)} + {}_eG_q \cdot {}_eJ_q \cdot F_{xemi}^{(1,1)} E_{eyqnj}^{(1,1)(e,e)} \right) \\
& + \sum_{e=1} \left({}_eR_A E_{ami}^{(1,1)(e,e)} F_{yenj}^{(0,0)} + {}_eR_B E_{ami}^{(1,1)(e,e)} P_{yenj}^{(0,0)} \right) \\
& + \sum_{e=1} \left({}_eR_C F_{xemi}^{(0,0)} E_{ayqnj}^{(1,1)(e,e)} + {}_eR_D F_{xemi}^{(0,0)} E_{bnj}^{(1,1)(e,e)} \right) \\
& + \sum_{e=1} \left\{ \frac{{}_eE_c \cdot {}_eA_c}{{}_eL} E_{excmi}^{(0,0)(e,e)} E_{eycnj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\
& \quad + \frac{4 {}_eE_c \cdot {}_eI_{cx}}{{}_eL} E_{excmi}^{(0,0)(e,e)} E_{eycnj}^{(1,1)(e,e)} \\
& \quad + \frac{4 {}_eE_c \cdot {}_eI_{cy}}{{}_eL} E_{excmi}^{(1,1)(e,e)} E_{eycnj}^{(0,0)(e,e)} \Big\}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{c=1} \left\{ \frac{e+1}{e+1} \frac{E_c \cdot e+1}{L} \frac{A_c}{e+1} \frac{L}{e+1} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{4}{e+1} \frac{E_c \cdot e+1}{L} \frac{I_{cx}}{e+1} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(1,1)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{4}{e+1} \frac{E_c \cdot e+1}{L} \frac{I_{cy}}{e+1} \frac{E_{(1,1)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right\} \quad [8]$$

$$K_{e-1,e} = \sum_{c=1} \left\{ -\frac{e}{e} \frac{E_c \cdot e}{L} \frac{A_c}{e} \frac{L}{e} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{2}{e} \frac{E_c \cdot e}{L} \frac{I_{cx}}{e} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(1,1)(e,e-1)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{2}{e} \frac{E_c \cdot e}{L} \frac{I_{cy}}{e} \frac{E_{(1,1)(e,e-1)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{y_c n_j}} \right\} \quad [9]$$

$$e P_{mn} = \sum_{e=1} \sum_{i=1} e P_i \cdot e f_{xm}(e x_i) e f_{yn}(e y_i) \\ + \sum_{e=1} \int_0^a \int_0^b e P_0 \cdot e f_{xm}(x) e f_{yn}(y) dy dx \quad [10]$$

ここに、

$$E_{e^{x_c m_i}}^{(\alpha, \beta)(k, l)} = k f_{xm}^{(\alpha)}(e x_c) l f_{yn}^{(\beta)}(e y_c) \quad , \quad E_{e^{y_c n_j}}^{(\alpha, \beta)(k, l)} = k f_{xm}^{(\alpha)}(e x_c) l f_{yn}^{(\beta)}(e y_c) \\ F_{xemi}^{(\alpha, \beta)} = \int_0^a e f_{xm}^{(\alpha)}(x) e f_{yn}^{(\beta)}(x) dx \quad , \quad F_{yeni}^{(\alpha, \beta)} = \int_0^b e f_{xm}^{(\alpha)}(y) e f_{yn}^{(\beta)}(y) dy$$

記号 $f^{(n)}$ は関数 f の n 階微分を意味する [11]

式 [7] より未定係数が得られ、これを式 [4] に代入することにより任意層の任意位置でのたわみが得られる。

2.7 固有値解析

固有値解析では、式 [6] において外力のなす仕事（エネルギー）を無視する。式 [6] より、マトリクス表示を用いて次式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_{e-1,e} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & K_{e,e} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & K_{r-1,r} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{r,r-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{r,r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1mn} \\ \cdot \\ w_{e-1mn} \\ w_{emn} \\ \cdot \\ w_{r-1mn} \\ w_{rmn} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_{e-1,e} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_{e,e} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & M_{r-1,r} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M_{r,r-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M_{r,r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1mn} \\ \cdot \\ w_{e-1mn} \\ w_{emn} \\ \cdot \\ w_{r-1mn} \\ w_{rmn} \end{Bmatrix} = 0 \quad [12]$$

以下に、質量マトリクスの対角項 $M_{e,e}$ 、連成項 $M_{e-1,e}$ をそれぞれ示す。

$$M_{e,e} = (e P_e h + e m_0) F_{xemi}^{(0,0)} F_{yeni}^{(0,0)} + \sum_{p=1} (e P_p \cdot e A_p \cdot \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_p m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_p n_j}}) \\ + \sum_{q=1} (e P_q \cdot e A_q \cdot \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_q m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_q n_j}}) \\ + \sum_{c=1} \left\{ \frac{e P_c \cdot e A_c \cdot e L}{4} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{e P_c \cdot e A_c \cdot e L^3}{105} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(1,1)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{e P_c \cdot e A_c \cdot e L^3}{105} \frac{E_{(1,1)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right\} \\ + \sum_{c=1} \left\{ \frac{e+1}{4} \frac{P_c \cdot e+1}{L} \frac{A_c \cdot e+1}{e+1} \frac{L}{e+1} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{e+1}{105} \frac{P_c \cdot e+1}{L} \frac{A_c \cdot e+1}{e+1} \frac{L^3}{e+1} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(1,1)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. + \frac{e+1}{105} \frac{P_c \cdot e+1}{L} \frac{A_c \cdot e+1}{e+1} \frac{L^3}{e+1} \frac{E_{(1,1)(e,e)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e)}}{e^{y_c n_j}} \right\} \quad [13]$$

$$M_{e-1,e} = \sum_{c=1} \left\{ \frac{e P_c \cdot e A_c \cdot e L}{4} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. - \frac{e P_c \cdot e A_c \cdot e L^3}{140} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(1,1)(e,e-1)}}{e^{y_c n_j}} \right. \\ \left. - \frac{e P_c \cdot e A_c \cdot e L^3}{140} \frac{E_{(1,1)(e,e-1)}}{e^{x_c m_i}} \frac{E_{(0,0)(e,e-1)}}{e^{y_c n_j}} \right\} \quad [14]$$

式 [12] より固有振動数および各固有振動数に対応した未定係数が得られ、これを式 [4] に代入することにより各次の振動モード形状を得る。

2.8 時刻歴応答解析

時刻歴応答解析は、式 [12] の剛性マトリクスおよび質量マトリクスに減衰マトリクスおよび動荷重ベクトルを加えて運動方程式を作成し、直接積分法により解析を行う。なお、減衰マトリクスには Rayleigh 型減衰を用いる。式 [15] に減衰マトリクス成分を、式 [17] に動荷重ベクトル成分をそれぞれ示す。

$$C_{mn,ij} = \alpha_M M_{mn,ij} + \alpha_K K_{mn,ij} \quad [15]$$

ここに、

$$\alpha_M = 2\omega_1 \omega_j \frac{\xi_j \omega_1 - \xi_1 \omega_j}{\omega_1^2 - \omega_j^2} \quad , \quad \alpha_K = \frac{2(\xi_j \omega_1 - \xi_1 \omega_j)}{\omega_1^2 - \omega_j^2} \quad [16]$$

ω_1 、 ξ_1 はそれぞれ I 次の円振動数、減衰定数

$$e P_{mn} = \sum_{e=1} \sum_{i=1} e P_i(t) e f_{xm}(e x_i) e f_{yn}(e y_i) \quad [17]$$

ここに、 $e P_i(t)$ は座標 $(e x_i, e y_i)$ に作用する動荷重である。

3. 有限要素法との比較

3.1 比較検討モデル

ここでは、静的解析および固有値解析について、本手法と有限要素法の結果を比較する。比較検討用のモデルとして、以下の2モデルを考える。（図-2 参照）

モデルA：境界上大梁4本・中央小梁1本の日の字型タイプの正方形板の四隅を柱で連結した3層梁付床スラブ（周辺境界は全て自由端）

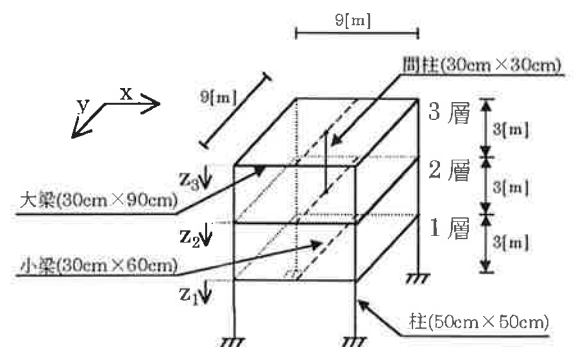


図-2 比較検討モデル概要図

モデルB:モデルAの2層と3層をスラブ中央で間柱により連結したモデル

なお両モデルとも、床部分・梁部分・柱部分ともに構造種別はRC造(ヤング係数: $2.06 \times 10^5 [\text{N/mm}^2]$, ポアソン比: 0.167, 重量密度: $23.5 [\text{kN/m}^3]$)で、全層ともスパン $9 [\text{m}] \times 9 [\text{m}]$, スラブ厚 $12 [\text{cm}]$ とし、階高は $3 [\text{m}]$ とした。

また比較する有限要素法は汎用ソフトMSC. MARCを用いた。その際床部分には 12×12 メッシュ分割の矩形シェル要素を、梁および柱部分にはビーム要素を用いた。

3.2 静的解析結果の比較

静的解析に用いた荷重は、スパン中央に作用する集中荷重 (98 kN) 及び分布荷重 (121 kN/m^2) の2種類とし、両ケースとも最上層(3層)に作用させた。なお、静的解析で用いる形状関数は、級数の項数をx方向20, y方向20(以下、 (20×20) と称す)とした。図-4~7にモデルA, B各層のx方向中央($x = 4.5 \text{ m}$)のたわみ量をスラブ端(点P: $(4.5, 0.0)$)から中央(点Q: $(4.5, 4.5)$)まで($y = 0.0 \sim 4.5 \text{ m}$)の範囲(図-3参照)で示す。これより、本解は有限要素法の解と比較して、静的たわみ値およびその分

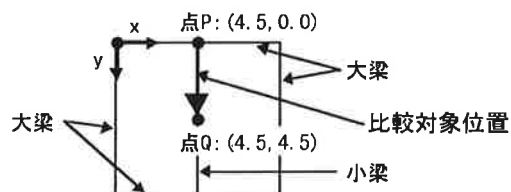


図-3 静的たわみ比較位置概念図

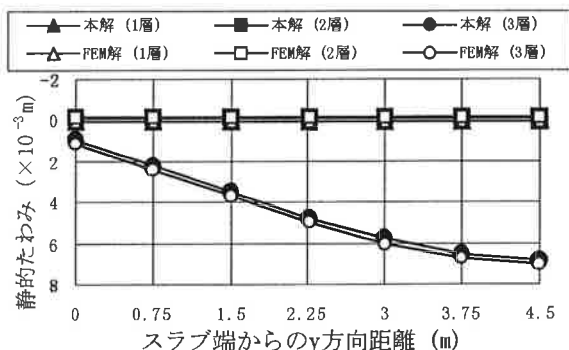


図-4 モデルA集中荷重時の静的たわみ

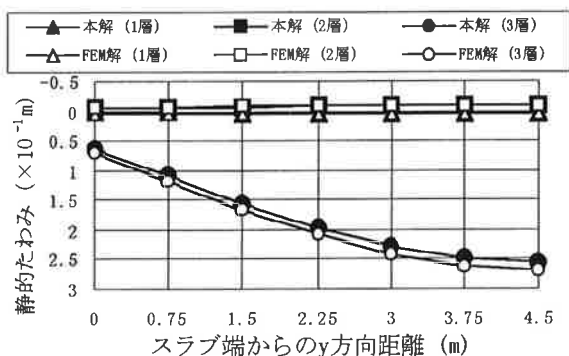


図-5 モデルA分布荷重時の静的たわみ

布形状ともに、荷重の種類および間柱の有無に関わらず、スラブ端から中央まで比較的良好に一致していることがわかる。モデルA, Bともに分布荷重時はスラブ端にも若干のたわみが見られる。また、モデルBでは間柱の影響で最上層(3層)および中間層(2層)中央付近のたわみがほぼ等しくなるようなたわみ分布を示している。この傾向は、本手法と有限要素法で良く一致していることがわかる。

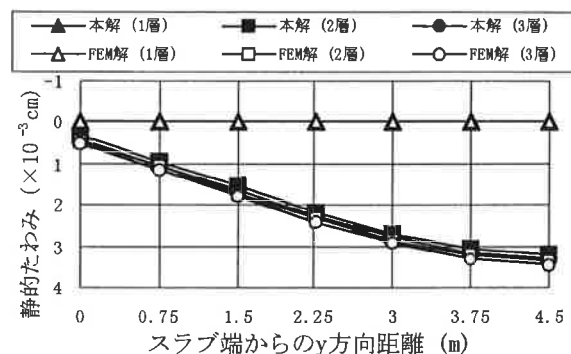


図-6 モデルB集中荷重時の静的たわみ

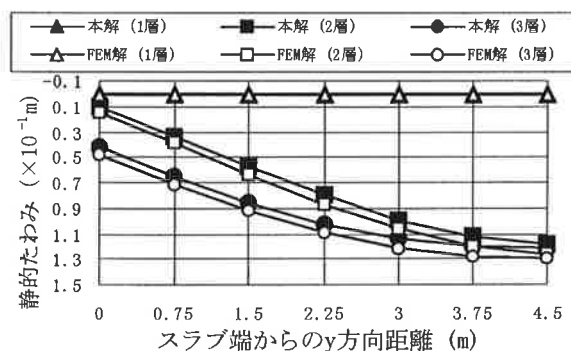


図-7 モデルB分布荷重時の静的たわみ

3.3 固有値解析結果の比較

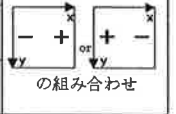
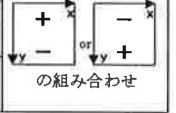
固有値解析を実施し、有限要素法の解と比較した。なお、固有値解析で用いる形状関数は、級数の項数をx, y方向ともに (10×10) と (20×20) の2通り実施した。

表-1及び2にモデルA, Bそれぞれのモード形状とその時の振動数を有限要素法の結果と共に示す。モード形状は、同表に示す平板単独での直交1次および直交2次の振動形状の組み合わせとして分類し、比較はそのモード形状を示すときの振動数および解析次数とした。両表より、モデルA, Bともに、各モード形状を示す振動数の解析次数およびその個数ともに有限要素法とほぼ一致していることがわかる。特にモデルB直交1次の組み合わせ数がモデルAに比較して減少しているのは、間柱によって繋がれた2層があたかも一体であるかのようなモード形状を示すことによる。その傾向は有限要素法と一致しており、良く表現できていることがわかる。なお、本手法は形状関数およびその個数を定義していることから、本来の振動系に人為的な拘束を付加したものと考えられる。したがって系の剛性は相対的に高まることから、本手法による固有振動数

は、本来の系よりも高くなる特性を持つ。実際本手法による振動数は有限要素法に比較して若干高めである。しかし、その違いは十分に許容できる範囲であると考えられる。なお、今回の級数の項数の違い程度では、解析結果における振動数およびモード形状の出現次数に与える差はそれほど明確なものではない。よって、今回のモデルのような場合、より解析時間が短縮できることを考慮して、級数の項数は(10×10)程度で十分であると考えられる。

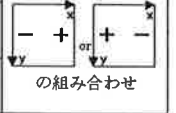
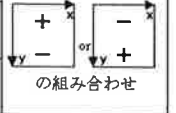
本手法は、有限要素法に比較して、解析に必要なデータの入力が少ないことで済み大幅な時間短縮が可能である。さらにその解は有限要素法と比較的良好一致することより十分実用的であると考えられる。

表-1 モデルAにおける振動数の比較

手法	級数の項数	振動数 (Hz)			モード形状
本解	(10×10)	① 6.782	② 7.239	③ 7.406	基本振動型 (直交1次) 
	(20×20)	① 6.680	② 7.090	③ 7.234	
FEM解	-	① 6.336	② 6.845	③ 6.537	の組み合わせ
本解	(10×10)	④ 13.04	⑥ 14.04	⑦ 14.37	基本振動型 (直交2次) 
	(20×20)	④ 12.63	⑤ 13.42	⑦ 13.67	
FEM解	-	④ 11.36	⑥ 12.16	⑦ 12.61	の組み合わせ
本解	(10×10)	⑤ 13.72	⑧ 15.50	⑩ 16.21	基本振動型 (直交2次) 
	(20×20)	⑥ 13.51	⑧ 15.08	⑨ 15.67	
FEM解	-	⑤ 11.51	⑧ 12.76	⑩ 13.54	の組み合わせ

注) 丸数字は解析次数を示す

表-2 モデルBにおける振動数の比較

手法	級数の項数	振動数 (Hz)			モード形状
本解	(10×10)	① 7.064	② 7.322		基本振動型 (直交1次) 
	(20×20)	① 6.921	② 7.163		
FEM解	-	① 6.405	② 6.674		の組み合わせ
本解	(10×10)	③ 13.34	⑥ 14.28	⑦ 14.88	基本振動型 (直交2次) 
	(20×20)	③ 12.90	⑤ 13.62	⑦ 14.12	
FEM解	-	③ 11.37	⑤ 12.36	⑨ 13.13	の組み合わせ
本解	(10×10)	⑤ 13.84	⑧ 15.69	⑩ 16.30	基本振動型 (直交2次) 
	(20×20)	⑥ 13.64	⑧ 15.27	⑨ 15.76	
FEM解	-	④ 11.52	⑦ 12.93	⑩ 13.81	の組み合わせ

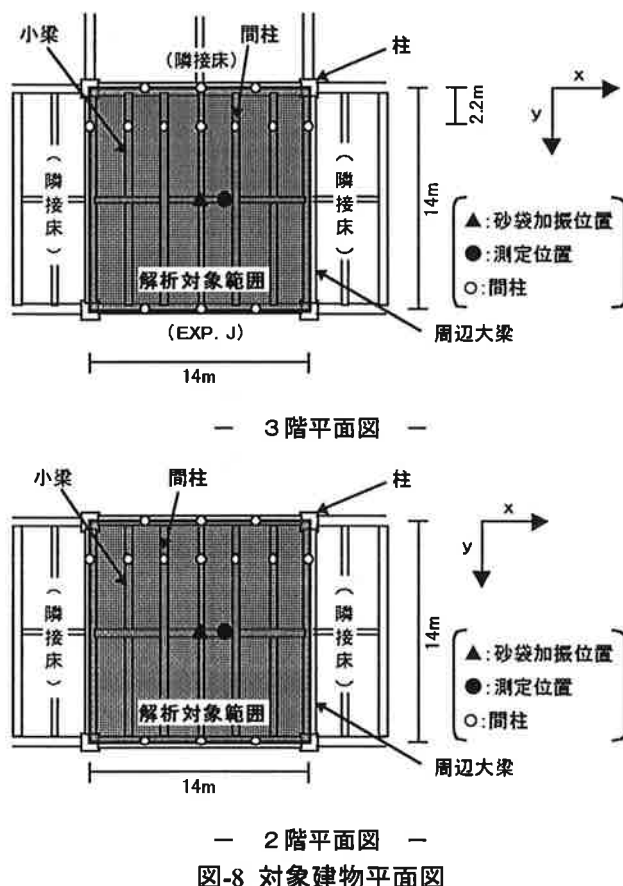
注) 丸数字は解析次数を示す

4. 実測結果との比較

前節までで、本手法は有限要素法に比較してデータ作成が非常に簡便で大幅な時間短縮が可能であり、さらに、その解は有限要素法と遜色ない結果が得られることを確認した。ここでは、本手法を実測結果と比較することにより、本手法の実用レベルを把握する。

4.1 実測建物概要

比較対象とした建物は、3階を倉庫、2階を事務所として使用しているS造建物である。図-8に対象建物の概念図を示す。各階とも(14m×14m)スパンであり、3階は3方向で隣接床と接しており、2階はx方向2方向のみ隣接床と接している。なお、図-8中に示す位置に雑壁を維持するための間柱が挿入されている。



4.2 測定方法

加振条件は、2階および3階床中央への砂袋落下(砂袋重量 30kg, 落下高さ 40cm)による自由振動試験とした。振動測定は各測定位置に計測用の振動計を設置し、全測点同時に携帯用微動計で床の応答速度を測定した。測定位置(図-8中●印)、砂袋加振位置(図-8中▲印)は、2、3階共にほぼ床中央付近の同位置とし、振動伝搬を把握するため測定は2、3階同時に行った。なお、測定条件はサンプリング周期=0.01秒(100Hz)とし、測定の開始および終了はマニュアルで行なった。

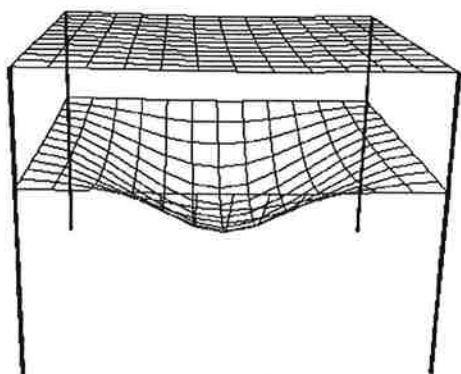
4.3 解析方法

本解析では図-8中に示したように4隅の柱で囲まれた1スパン範囲内を解析対象とし、解析に用いた各部材の諸元はすべて設計値を用いた。また、解析条件として、梁関数の級数の項数は前節の固有値解析結果の比較結果を参考に(10×10)とした。減衰定数は、床振動実験による床の減衰定数の例⁴⁾を参考に、1次および2次モードに相当する振動数で3%とした。応答解析は時間刻み0.005秒で2.0秒間の解析を行った。なお、応答解析に用いた砂袋自由落下時の衝撃外力は、作用時間0.015秒、力積52.9(N・sec)の衝撃荷重とした。

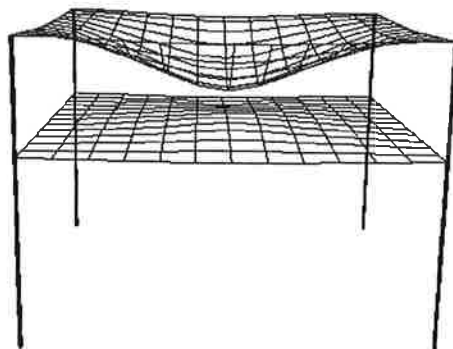
4.4 解析結果および実測結果

表-3に固有振動数の比較を示す。これより、4次の振

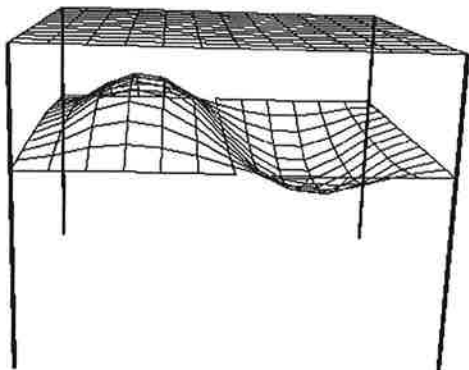
動数まで解析結果は実測結果とよく対応しており、十分実用レベルであることがわかる。また、図-9に解析により得られたモード形状概念図を示す。表中にも示したが、1次および3次モードは主に2階床変形が優勢なモード形状を、2次および4次モードは主に3階床の変形が優勢なモード形状を示している。図-10および11に3階床に砂袋を自由落下した場合の3階および2階床中央付近での変位応答波形を、図-12および13に2階床中央砂袋加振時の3階床および2階床中央付近での変位応答波形を解析結果と実測値の比較として示す。また、各々の実測最大値に対する解析結果最大値の割合を表-4に示す。これより、2階床加振時の2階床での応答値が実測値に比較して若干大きな値を示し、その他は、すべて小さな値となった。このように、最大変位の比較では若干の差は見られ



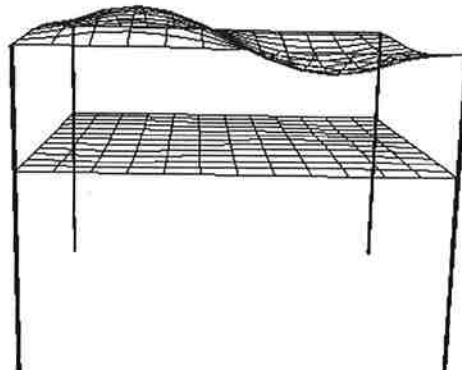
— 1次モード概念図 —



— 2次モード概念図 —



— 3次モード概念図 —



— 4次モード概念図 —

図-9 固有値解析結果概念図 (間柱は省略して表示)

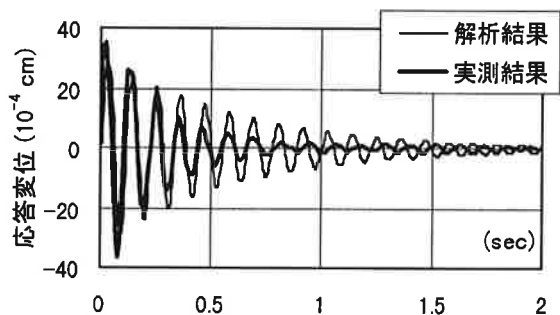


図-10 3階床加振時の3階床中央応答変位波形

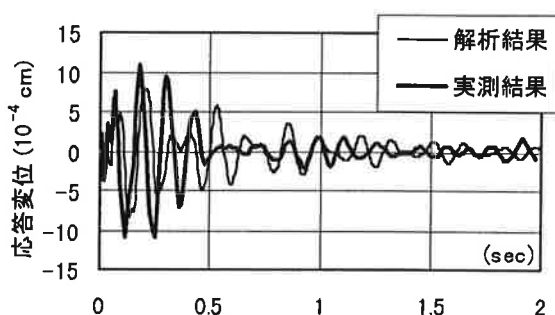


図-11 3階床加振時の2階床中央応答変位波形

るものの、波形そのものは実測値の傾向をよく表現しており、十分実用的であると考えられる。

表-3 固有振動数の比較

全体 次数	主要モード 出現階 (解析結果)	解析結果 (Hz)	実測結果 (Hz)	解析 実測 (%)
1次	2階	6.244	6.3	99.1
2次	3階	9.143	8.7	105.1
3次	2階	10.20	10.3	99.0
4次	3階	14.10	14.5	97.2

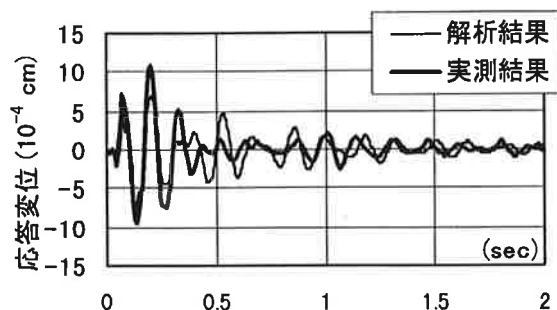


図-12 2階床加振時の3階床中央応答変位波形

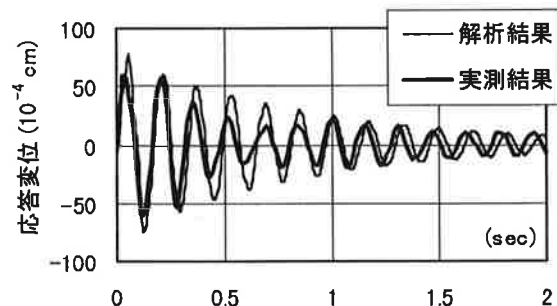


図-13 2階床加振時の2階床中央応答変位波形

表-4 最大変位の比較

加振階	応答階	最大変位 (cm)		解析 実測 (%)
		解析結果	実測値	
3階	3階	0.0029	0.0037	78.4
	2階	0.0008	0.0011	72.7
2階	3階	0.0008	0.0011	72.7
	2階	0.0077	0.0061	126.2

5. まとめ

対象とする床スラブとは異なる階に外力が作用する場合や間柱等により上下階床が連結された場合等、多層間の振動伝搬や連成効果が考慮可能な簡易解析法の確立を目指し、その定式化を示した。さらに提示した簡易解析法の妥当性を検証すべく有限要素法と比較検証を行った。その結果以下の知見が得られた。

- (1) 静的たわみを比較した結果、本手法による静的たわみは有限要素法の解に対して、スラブ端から中央まで比較的良く一致することが確認された。また、そのたわみ分布形状も良く一致している。
- (2) 固有値解析結果を比較した結果、本手法による固有振動数は、有限要素法の解に対して若干高めではあるが十分に許容できる範囲であることが確認された。また、各モードの出現傾向は良く一致しており、十分実用的であると考えられる。

以上より、本手法は、有限要素法に比較してデータ作成が非常に簡便で大幅な時間短縮が可能であり、さらに、その解は有限要素法と遜色ない結果が得られることを確認した。

前述の内容を踏まえ、本手法を実測結果と比較した結果以下の結論が得られた。

- (3) 本手法による固有振動数と実測による固有振動数を比較した結果、4次振動数まで非常に良く一致し、本手法の有効性が確認された。
- (4) 本手法による時刻歴解析結果と実測結果を比較した結果、最大変位値で若干の違いはあるものの、その傾向は概ね捉えていることより、振動伝搬予測としても十分実用的であることが確認された。

6. おわりに

本報では、柱による建物内振動伝搬のみを考慮しているが、実際には壁も振動伝搬に対して大きな役割を果たしている。また、建物内のみでなく建物外部からの振動伝搬による問題も重要な課題である。したがって今後は建物内振動伝搬要素としての壁要素の組み込みや建物外部に振動源がある場合についても対応できるよう拡張していく予定である。

本手法に関わらず、建物内部および外部振動源に対して時刻歴解析を行うためには、検討対象とすべき振動源の波形収集が必要であり、今後はこのような振動源データの整備も随時行っていきたい。

なお、本報は、(株)フジタとの共同研究として実施した結果をとりまとめたものである。

参考文献

- 1) 加藤泰正, 本間俊雄, 中山昌尚, 増田圭司: Rayleigh-Ritz 法を応用した床スラブの微振動解析, 日本建築学会構造系論文集, No.518, pp.147-154, 1999.4
- 2) 加藤 泰正, 環境振動設計支援のための床スラブ簡易解析手法とシステム化技術に関する研究, 東京理科大学博士論文, 2000.1
- 3) 森下真行, 斉藤芳人, 中山昌尚, 加藤泰正, 増田圭司, 多層床スラブの振動解析システムの開発 (その1) (その2), 日本建築学会学術講演梗概集, 2001.
- 4) 日本建築学会, 建築物の振動に関する居住性能評価指針同解説, 1992 年