

多層床スラブの簡易解析システムの開発 (その2) 壁要素の追加とその評価

森 下 真 行 齊 藤 芳 人

要 旨

著者らは、床振動の簡易解析システムとして、既往のRayleigh-Ritz法による矩形平板の解析法に多層間の振動伝搬要素として（間）柱を考慮することにより多層に発展させた多層床スラブの簡易解析法について既に開発している。しかしながら、実際には振動伝搬要素として壁も大きな役割を果たしている。本報は、その柱付き多層床スラブの振動解析法に壁要素を付加した壁付き多層床スラブの簡易解析法の定式化を示すと共に、その有効性および実用性を検証した。以下に得られた結果を示す。

(1)固有値解析結果について、本手法と有限要素法とを比較した結果、両者は良く対応していることを確認した。

(2)実測により得られた固有振動数および応答波形を本手法による解と比較した結果、その傾向は概ね捉えていることを確認した。

以上より、本解析法は、壁付き多層床スラブの簡易解析法として十分実用的なレベルにあることが分かった。

キーワード 床振動／多層床スラブ／Rayleigh-Ritz法／振動解析／有限要素法／実測結果

目 次

- | | |
|--------------|-------------|
| 1. はじめに | 4. 実測結果との比較 |
| 2. 解析理論 | 5. まとめ |
| 3. 有限要素法との比較 | 6. おわりに |

Simplified Static and Vibration Analysis for Multi-Floor (Part.1) Analytical Theory with Wall-element and Estimation

Tadayuki MORISHITA Yoshihito SAITO

Synopsis:

This paper presents the theory of a simplified dynamic analysis with the Rayleigh-Ritz method for multi-floor with wall-element. This method enables to estimate the characteristics of propagation and interaction between the upper floor and the lower one. The results of this method were compared with these of FEM and observation in order to verify the practicability of the method.

The results were obtained as follows.

- (1) It was confirmed that the results of eigenvalue analysis by this method agreed well with those of the FEM.
- (2) It was confirmed that the natural frequencies and the response waves calculated by this method corresponded well with those measured.

Considering the above facts, it is concluded that the proposed method is sufficiently practical for vibration analysis of multi-floor.

1. はじめに

床振動の簡易解析システムとして、Rayleigh-Ritz 法による矩形平板の解析法が加藤ら¹⁾²⁾により開発されている。著者らは、この矩形平板の振動解析法を拡張した多層床スラブの振動解析システムについて既に発表している。これは上下層間の振動伝搬および連成効果を考慮した解析を行うために、(間)柱を考慮して多層床モデル³⁾⁴⁾⁵⁾に拡張したものであった。

本報告は、この Rayleigh-Ritz 法を用いた多層床スラブの振動解析法に、上下層間の振動伝播要素として壁要素を追加した場合の定式化を示し、さらに、本手法を有限要素法および実測結果と比較することで、本手法の有効性を検証する。

2. 解析理論

2.1 多層床スラブのモデル化

材料の直交異方性を考慮した単層床スラブを、曲げ及びねじり剛性を考慮した梁で補強し、さらに軸剛性および曲げ剛性を考慮した柱で繋いだ多層梁付き床スラブを考える。次にこれらに軸剛性および壁面外方向の曲げ剛性を考慮した壁で繋ぐことで壁付多層床スラブをモデル化する。但し、壁面外方向を軸とした回転は拘束することとし、最下層の壁のみ壁下端は固定端と仮定する。モデル化の概念図を図-1 に示す。

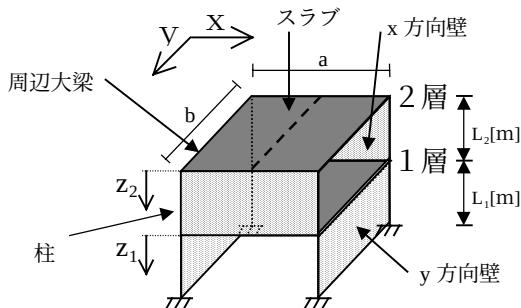


図-1 モデル概念図

2.2 ひずみエネルギー

多層床スラブモデルに対して、最大ひずみエネルギー U は次式で表される。

$$U = \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(e D_x \cdot e w_{,xx}^2 + e D_y \cdot e w_{,yy}^2 + 2 e D_{xy} \cdot e w_{,xy}^2 + 4 e D_{xy} \cdot e w_{,xy}^2 \right) dy dx \right\} \quad (\text{矩形平板による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1} \left(e E_p \cdot e I_p \int_0^b e w_{,yy}^2 \Big|_{x=e x_p} dy + e G_p \cdot e J_p \int_0^b e w_{,xy}^2 \Big|_{x=e x_p} dy \right) \right\} \quad (\text{y 軸方向梁による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{q=1} \left(e E_q \cdot e I_q \int_0^a e w_{,xx}^2 \Big|_{y=e y_q} dx + e G_q \cdot e J_q \int_0^a e w_{,xy}^2 \Big|_{y=e y_q} dx \right) \right\} \quad (\text{x 軸方向梁による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} e R_A \int_0^b e w_{,x}^2 \Big|_{x=0} dy + \frac{1}{2} e R_B \int_0^b e w_{,x}^2 \Big|_{x=a} dy \right\} \quad (\text{y 軸方向境界による})$$

$$+ \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} e R_C \int_0^a e w_{,y}^2 \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2} e R_D \int_0^a e w_{,y}^2 \Big|_{y=b} dx \right\} \quad (\text{x 軸方向境界による})$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{e E_c \cdot e A_c}{e L} \cdot \left(e w \Big|_{(e x_c, e y_c)} - e^{-1} w \Big|_{(e x_c, e y_c)} \right)^2 \right\}$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ + 2 \frac{e E_c \cdot e I_{cx}}{e L} \cdot \left(\begin{array}{l} e^{-1} w_{,y}^2 \Big|_{(e x_c, e y_c)} \\ + e^{-1} w_{,y} \cdot \left(e x_c \cdot e y_c \right) \cdot e w_{,y} \Big|_{(e x_c, e y_c)} \\ + e w_{,y}^2 \Big|_{(e x_c, e y_c)} \end{array} \right) \right\}$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ + 2 \frac{e E_c \cdot e I_{cy}}{e L} \cdot \left(\begin{array}{l} e^{-1} w_{,x}^2 \Big|_{(e x_c, e y_c)} \\ + e^{-1} w_{,x} \cdot \left(e x_c \cdot e y_c \right) \cdot e w_{,x} \Big|_{(e x_c, e y_c)} \\ + e w_{,x}^2 \Big|_{(e x_c, e y_c)} \end{array} \right) \right\} \quad (\text{柱による})$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{wp=1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{e E_{wp} \cdot e d_{wp}}{e L} \cdot \int_0^b \left(e w \Big|_{x=e x_{wp}} - e^{-1} w \Big|_{x=e x_{wp}} \right)^2 dy \right\} \quad (\text{y 軸方向壁の軸剛性による})$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{wp=1} \left\{ 2 \frac{e E_{wp} \cdot e I_{wpy}}{e L} \cdot \int_0^b \left(\begin{array}{l} e^{-1} w_{,x}^2 \Big|_{x=e x_{wp}} \\ + e^{-1} w_{,x} \cdot \left(e x_{wp} \cdot e y_{wp} \right) \cdot e w_{,x} \Big|_{x=e x_{wp}} \\ + e w_{,x}^2 \Big|_{x=e x_{wp}} \end{array} \right) dy \right\} \quad (\text{y 軸方向壁の y 軸回りの曲げ剛性による})$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{wq=1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{e E_{wq} \cdot e d_{wq}}{e L} \cdot \int_0^a \left(e w \Big|_{y=e y_{wq}} - e^{-1} w \Big|_{y=e y_{wq}} \right)^2 dx \right\} \quad (\text{x 軸方向壁の軸剛性による})$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{wq=1} \left\{ + 2 \frac{e E_{wq} \cdot e I_{wqx}}{e L} \cdot \int_0^a \left(\begin{array}{l} e^{-1} w_{,y}^2 \Big|_{y=e y_{wq}} \\ + e^{-1} w_{,y} \cdot \left(e y_{wq} \cdot e x_{wq} \right) \cdot e w_{,y} \Big|_{y=e y_{wq}} \\ + e w_{,y}^2 \Big|_{y=e y_{wq}} \end{array} \right) dx \right\}$$

$$(\text{x 軸方向壁の x 軸回りの曲げ剛性による}) \quad [1]$$

ここに、左下添字 e は層番号を、右下添字 c, p, q, wp, wq はそれぞれ第 c 番目の柱、 y 軸に平行な第 p 番目の梁、 x 軸に平行な第 q 番目の梁、 y 軸に平行な第 wp 番目の壁、 x 軸に平行な第 wq 番目の壁を示している。また、 $e D_x, e D_y, e D_{xy}$ は e 層直交異方性板の曲げ剛性を、 $e v_x$ は e 層直交異方性板の x 軸方向ポアソン比を示す。梁は y, x 軸にそれぞれ平行に配置される。 y 軸に平行な梁は $x=e x_p$ 線上に配置され曲げ剛性 $e E_p \cdot e I_p$ 、ねじり剛性 $e G_p \cdot e J_p$ を持つ。同様に x 軸に平行な梁は $y=e y_q$ 線上に配置され、曲げ剛性 $e E_q \cdot e I_q$ 、ねじり剛性 $e G_q \cdot e J_q$ を持つ。 $e R_A, e R_B, e R_C, e R_D$ はそれぞれ e 層境界 $A(x=0), B(x=a), C(y=0), D(y=b)$ 下の一様な回転バネ剛性である。柱は座標 $(e x_c, e y_c)$ で上下2層間を連結しており、ヤング係数 $e E_c$ 、断面積 $e A_c$ 、 x, y 軸に

関する断面二次モーメント ${}_e I_{cx}$, ${}_e I_{cy}$ を持つ。壁は座標 $x={}_e x_{wp}, y={}_e y_{wq}$ 線に配置され、ヤング係数 ${}_e E_{wp}$ 、壁厚 ${}_e d_{wp}$ 、 ${}_e d_{wq}$, y, x 軸に関する断面二次モーメント ${}_e I_{wpy}$ 、 ${}_e I_{wqx}$ を持つ。また、 ${}_e L$ は e 層の階高を、 ${}_e w|_{(x,y)}$ は座標 (x,y) における e 層床スラブのたわみを、 ${}_e w|_{x=s}$ は $(x=s)$ 上の任意点でのたわみを示している。なお、記号 ${}_e w_{,s}$ は、 e 層床スラブのたわみ ${}_e w$ に対する s 方向の微分を、記号 ${}_e w_{,st}$ は、 e 層床スラブのたわみ ${}_e w$ に対する s 方向の微分後さらに t 方向の微分を意味する。

2.3 運動エネルギー

同様に多層床スラブモデルに対する運動エネルギー T は次式で表される。

$$\begin{aligned}
T = & \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} ({}_e \rho \cdot {}_e h + {}_e m_0) \omega^2 \int_0^a \int_0^b {}_e w^2 dy dx \right\} \quad (\text{矩形平板による}) \\
& + \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1} {}_e \rho_p \cdot {}_e A_p \cdot \omega^2 \int_0^b {}_e w^2 \Big|_{x={}_e x_p} dy \right\} \quad (y \text{ 軸方向梁による}) \\
& + \sum_{e=1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{q=1} {}_e \rho_q \cdot {}_e A_q \cdot \omega^2 \int_0^a {}_e w^2 \Big|_{y={}_e y_q} dx \right\} \quad (x \text{ 軸方向梁による}) \\
& + \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 \cdot {}_e \rho_c \cdot {}_e A_c \cdot e L \left[\frac{1}{3} \left(\begin{aligned} & {}_e w|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \\ & + {}_e w|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \cdot {}_e^{-1} w|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \\ & + {}_e^{-1} w|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \end{aligned} \right) \right] \right\} \\
& + \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ + \frac{1}{420} \omega^2 \cdot {}_e \rho_c \cdot {}_e A_c \cdot e L^3 \begin{pmatrix} 2 \cdot {}_e^{-1} w^2|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \\ -3 \cdot {}_e^{-1} w_{,y}|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \cdot {}_e w_{,y}|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \\ + 2 \cdot {}_e w^2|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \end{pmatrix} \right\} \\
& + \sum_{e=1} \sum_{c=1} \left\{ + \frac{1}{420} \omega^2 \cdot {}_e \rho_c \cdot {}_e A_c \cdot e L^3 \begin{pmatrix} 2 \cdot {}_e^{-1} w^2|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \\ -3 \cdot {}_e^{-1} w_{,x}|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \cdot {}_e w_{,x}|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \\ + 2 \cdot {}_e w^2|_{({}_e x_c, {}_e y_c)} \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{柱による}) \\
& + \sum_{e=1} \sum_{wp=1} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot {}_e \rho_{wp} \cdot {}_e d_{wp} \cdot e L \int_0^b \left(\begin{aligned} & {}_e w|_{x={}_e x_{wp}} \\ & + {}_e w|_{x={}_e x_{wp}} \cdot {}_e w|_{x={}_e x_{wp}} \\ & + {}_e w|_{x={}_e x_{wp}} \end{aligned} \right) dy \right\} \quad (y \text{ 軸方向壁の軸変形による}) \\
& + \sum_{e=1} \sum_{wq=1} \left\{ + \frac{1}{420} \omega^2 \cdot {}_e \rho_{wq} \cdot {}_e d_{wq} \cdot e L^3 \int_0^b \begin{pmatrix} 2 \cdot {}_e^{-1} w^2|_{x={}_e x_{wp}} \\ -3 \cdot {}_e^{-1} w_{,y}|_{x={}_e x_{wp}} \cdot {}_e w_{,y}|_{x={}_e x_{wp}} \\ + 2 \cdot {}_e w^2|_{x={}_e x_{wp}} \end{pmatrix} dy \right\} \quad (y \text{ 方向壁の } y \text{ 軸回りの曲げ変形による}) \\
& + \sum_{e=1} \sum_{wq=1} \left\{ \frac{1}{2} \omega^2 \cdot {}_e \rho_{wq} \cdot {}_e d_{wq} \cdot e L \int_0^a \left(\begin{aligned} & {}_e w|_{y={}_e y_{wq}} \\ & + {}_e w|_{y={}_e y_{wq}} \cdot {}_e w|_{y={}_e y_{wq}} \\ & + {}_e w|_{y={}_e y_{wq}} \end{aligned} \right) dx \right\} \quad (x \text{ 軸方向壁の軸変形による})
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{e=1} \sum_{wq=1} \left\{ \frac{1}{420} \omega^2 \cdot {}_e \rho_{wq} \cdot {}_e d_{wq} \cdot e L^3 \int_0^a \begin{pmatrix} 2 \cdot {}_e^{-1} w^2|_{y={}_e y_{wq}} \\ -3 \cdot {}_e^{-1} w_{,y}|_{y={}_e y_{wq}} \cdot {}_e w_{,y}|_{y={}_e y_{wq}} \\ + 2 \cdot {}_e w^2|_{y={}_e y_{wq}} \end{pmatrix} dx \right\} \quad (x \text{ 方向壁の } x \text{ 軸回りの曲げ変形による}) \quad [2]$$

ここに、 ω は円振動数を、 ${}_e h$ は e 層床スラブ厚を、 ${}_e \rho$ 、 ${}_e \rho_c$ 、 ${}_e \rho_p$ 、 ${}_e \rho_q$ 、 ${}_e \rho_{wp}$ 、 ${}_e \rho_{wq}$ はそれぞれ e 層の床スラブ、柱および y, x 軸方向の梁および壁の密度を示す。 ${}_e m_0$ は e 層の床にかかる自重以外の単位面積あたりの等分布質量である。また、 ${}_e A_p$ 、 ${}_e A_q$ はそれぞれ e 層 y, x 軸方向の梁の断面積を示す。

2.4 外力によるエネルギー

外力のなす仕事（エネルギー）は次式のように表現できる。

$$W = \sum_{e=1} \sum_{i=1} {}_e p_i \cdot {}_e w|_{({}_e x_i, {}_e y_i)} + \sum_{e=1} \int_0^a \int_0^b {}_e p_0 \cdot {}_e w|_{(x,y)} dy dx \quad [3]$$

ここに、 ${}_e p_i$ は e 層 i 番目の集中荷重、 $({}_e x_i, {}_e y_i)$ は集中荷重の作用位置、 ${}_e p_0$ は e 層に作用する単位面積あたりの荷重である。

2.5 Rayleigh-Ritz 法

各層床スラブのたわみを次のように定義する。

$${}_e w(x,y) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} {}_e w_{mn} \cdot {}_e f_{xm}(x) \cdot {}_e f_{yn}(y) \quad [4]$$

ただし、 ${}_e w_{mn}$ は未定係数であり、 ${}_e f_{xm}(x)$ 、 ${}_e f_{yn}(y)$ はそれぞれ e 層における x 軸方向、 y 軸方向の形状関数である。以下にここで用いる x 軸方向の形状関数（梁関数）を示す。

$$\begin{aligned}
{}_e f_{xm}(x) = & {}_e C_{1m} \left(\sin \frac{{}_e \lambda_m \cdot {}_e x}{a} \right) + {}_e C_{2m} \left(\cos \frac{{}_e \lambda_m \cdot {}_e x}{a} \right) \\
& + {}_e C_{3m} \left(\sinh \frac{{}_e \lambda_m \cdot {}_e x}{a} \right) + {}_e C_{4m} \left(\cosh \frac{{}_e \lambda_m \cdot {}_e x}{a} \right)
\end{aligned} \quad [5]$$

ここに、 ${}_e \lambda_m$ 、 ${}_e C_{1m}$ 、 ${}_e C_{2m}$ 、 ${}_e C_{3m}$ 、 ${}_e C_{4m}$ は未定係数であり、 e 層の境界条件を満足するように ${}_e \lambda$ を少しずつ変化させながら収束計算により解を決定する。 y 軸方向の形状関数についても同様である。なお、 m, n はそれぞれ x, y 軸方向の級数の項数を示しており、これを大きくとることでより複雑な（高次の）変形（モード形状）を表現できるが、その分計算時間が長くなる性質のものである。

式 [4] を式 [1] [2] [3] にそれぞれ代入し、さらに未定係数 ${}_e w_{mn}$ に対して、全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - T - W$ が停留する条件（エネルギー最小の原理）から次式が成立する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial e^{w_{mn}}} = \frac{\partial U}{\partial e^{w_{mn}}} - \frac{\partial T}{\partial e^{w_{mn}}} - \frac{\partial W}{\partial e^{w_{mn}}} = 0 \quad [6]$$

式〔6〕が成立するように，未定係数 ${}_e w_{mn}$ を決定する．

2.6 固有値解析

固有値解析では，式〔6〕において外力のなす仕事（エネルギー）を無視する．式〔6〕より，マトリクス表示を用いて次式を得る．

$$\left[\begin{array}{ccccccc} K_{t+1,t} & * & & & & & \\ & K_{t+1,t-1} & * & & & & \\ & & K_{t+1,t-2} & * & & & \\ & & & K_{t+1,t-3} & * & & \\ & & & & K_{t+1,t-4} & * & \\ & & & & & K_{t+1,t-5} & * \\ & & & & & & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} *w_{ij} \\ * \\ * \\ *w_{ij} \\ * \\ * \\ *w_{ij} \end{array} \right\} - (\omega)^2 \left[\begin{array}{ccccccc} M_{t+1,t} & * & & & & & \\ & M_{t+1,t-1} & * & & & & \\ & & M_{t+1,t-2} & * & & & \\ & & & M_{t+1,t-3} & * & & \\ & & & & M_{t+1,t-4} & * & \\ & & & & & M_{t+1,t-5} & * \\ & & & & & & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} *w_{ij} \\ * \\ * \\ *w_{ij} \\ * \\ * \\ *w_{ij} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \end{array} \right\} \quad [7]$$

以下に、剛性マトリクスの対角項 $K_{e,e}$ 、連成項 $K_{e-1,e}$ をそれぞれ示す。

$$\begin{aligned}
& K_{e,e} = e \cdot D_x \cdot F_{xmi}^{(2,2)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} + e \cdot D_y \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(2,2)(e,e)} \\
& + 2 \cdot e \cdot D_y \cdot e \cdot v_x \left(F_{xmi}^{(2,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,2)(e,e)} + F_{xmi}^{(0,2)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(2,0)(e,e)} \right) \\
& + 4 \cdot e \cdot D_{xy} \cdot F_{xmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(1,1)(e,e)} \\
& + \sum_{p=1} \left(e \cdot E_p \cdot e \cdot I_p \cdot E_{xpmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(2,2)(e,e)} + e \cdot G_p \cdot e \cdot J_p \cdot E_{xpmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(1,1)(e,e)} \right) \\
& + \sum_{q=1} \left(e \cdot E_q \cdot e \cdot I_q \cdot F_{xmi}^{(2,2)(e,e)} \cdot E_{yqnj}^{(0,0)(e,e)} + e \cdot G_q \cdot e \cdot J_q \cdot F_{xmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot E_{yqnj}^{(1,1)(e,e)} \right) \\
& + e \cdot R_A \cdot E_{omi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} + e \cdot R_B \cdot E_{ami}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \\
& + e \cdot R_C \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{onj}^{(1,1)(e,e)} + e \cdot R_D \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{bnj}^{(1,1)(e,e)} \\
& + \sum_{c=1} \left\{ \frac{e \cdot E_c \cdot e \cdot A_c \cdot E_{xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ycnj}^{(0,0)(e,e)}}{e \cdot L} + \frac{4 \cdot e \cdot E_c \cdot e \cdot I_{cx} \cdot E_{xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ycnj}^{(1,1)(e,e)}}{e \cdot L} \right. \\
& \left. + \frac{4 \cdot e \cdot E_c \cdot e \cdot I_{cy} \cdot E_{xcmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot E_{ycnj}^{(0,0)(e,e)}}{e \cdot L} \right\} \\
& + \sum_{c=1} \left\{ \frac{e+1 \cdot E_c \cdot e+1 \cdot A_c \cdot E_{e+1xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{e+1ycnj}^{(0,0)(e,e)}}{e+1 \cdot L} + \frac{4 \cdot e+1 \cdot E_c \cdot e+1 \cdot I_{cx} \cdot E_{e+1xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{e+1ycnj}^{(1,1)(e,e)}}{e+1 \cdot L \cdot e+1} \right. \\
& \left. + \frac{4 \cdot e+1 \cdot E_c \cdot e+1 \cdot I_{cy} \cdot E_{e+1xcmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot E_{e+1ycnj}^{(0,0)(e,e)}}{e+1 \cdot L} \right\} \\
& + \sum_{wp=1} \left\{ \frac{e \cdot E_{wp} \cdot e \cdot A_{wp} \cdot E_{xwpmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)}}{e \cdot L} + \frac{4 \cdot e \cdot E_{wp} \cdot e \cdot I_{wpy} \cdot E_{xwpmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)}}{e \cdot L} \right\} \\
& + \sum_{wp=1} \left\{ \frac{e+1 \cdot E_{wp} \cdot e+1 \cdot A_{wp} \cdot E_{e+1xwpmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)}}{e+1 \cdot L} + \frac{4 \cdot e+1 \cdot E_{wp} \cdot e+1 \cdot I_{wpy} \cdot E_{e+1xwpmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)}}{e+1 \cdot L} \right\} \\
& + \sum_{wq=1} \left\{ \frac{e \cdot E_{wq} \cdot e \cdot A_{wq} \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ywqnj}^{(0,0)(e,e)}}{e \cdot L} + \frac{4 \cdot e \cdot E_{wq} \cdot e \cdot I_{wqx} \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ywqnj}^{(1,1)(e,e)}}{e \cdot L} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{wq=1} \left\{ \frac{e_{+1} E_{wq} \cdot e_{+1} A_{wq}}{e_{+1} L} F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{+1 y w q n j}^{(0,0)(e,e)} + \frac{4 \cdot e_{+1} E_{wq} \cdot e_{+1} L_{wq}}{e_{+1} L} F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{+1 y w q n j}^{(1,1)(e,e)} \right\} \quad [8]$$

$$\begin{aligned}
K_{e-1,e} = & \sum_{c=1} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{eE_c \cdot eA_c}{eL} F_{e x_c m i}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{e y_{e c} n j}^{(0,0)(e,e-1)} \\ & + \frac{2 \cdot eE_c \cdot eI_{c x}}{eL} F_{e x_c m i}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{e y_{c n j}}^{(1,1)(e,e-1)} \\ & + \frac{2 \cdot eE_c \cdot eI_{c y}}{eL} F_{e x_c m i}^{(1,1)(e,e-1)} \cdot E_{e y_{c n j}}^{(0,0)(e,e-1)} \end{aligned} \right\} \\
& + \sum_{w p=1} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{eE_{w p} \cdot eA_{w p}}{eL} F_{e x_{w p} m i}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot F_{y n j}^{(0,0)(e,e-1)} \\ & + \frac{2 \cdot eE_{w p} \cdot eI_{w p y}}{eL} F_{e x_{w p} m i}^{(1,1)(e,e-1)} \cdot F_{y n j}^{(0,0)(e,e-1)} \end{aligned} \right\} \\
& + \sum_{w q=1} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{eE_{w q} \cdot eA_{w q}}{eL} F_{x m i}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{e y_{w p} n j}^{(0,0)(e,e-1)} \\ & + \frac{2 \cdot eE_{w q} \cdot eI_{w q x}}{eL} F_{x m i}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{e y_{w q} n j}^{(1,1)(e,e-1)} \end{aligned} \right\} \quad [9]
\end{aligned}$$

ここに,

$$E_{xmi}^{(\alpha,\beta)(k,l)} = {}_k f_{xm}^{(\alpha)}(x) \cdot {}_l f_{xi}^{(\beta)}(x) \quad , \quad E_{ynj}^{(\alpha,\beta)(k,l)} = {}_k f_{yn}^{(\alpha)}(y) \cdot {}_l f_{yj}^{(\beta)}(y)$$

$$F_{xmi}^{(\alpha,\beta)(k,l)} = \int_0^a \left({}_k f_{xm}^{(\alpha)}(x) \cdot {}_l f_{xi}^{(\beta)}(x) \right) dx \quad , \quad F_{ynj}^{(\alpha,\beta)(k,l)} = \int_0^b \left({}_k f_{yn}^{(\alpha)}(y) \cdot {}_l f_{yj}^{(\beta)}(y) \right) dy$$

記号 $f^{(n)}$ は関数 f の n 階微分を意味する [10]

以下に，質量マトリクスの対角項 $M_{e,e}$ ，連成項 $M_{e-1,e}$ をそれぞれ示す．

$$\begin{aligned}
M_{e,e} = & (e\rho \cdot e_h + e_m) F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \\
& + \sum_{p=1} \left(e\rho_p \cdot e_{A_p} \cdot E_{xpmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \right) \\
& + \sum_{q=1} \left(e\rho_q \cdot e_{A_q} \cdot E_{xqmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \right) \\
& + \sum_{c=1} \left\{ \frac{e\rho_c \cdot e_{A_c} \cdot eL}{3} E_{xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ycnj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\
& \quad + \frac{e\rho_c \cdot e_{A_c} \cdot eL^3}{105} E_{xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ycnj}^{(1,1)(e,e)} \left. \right\} \\
& \quad + \left\{ \frac{e\rho_c \cdot e_{A_c} \cdot eL^3}{105} E_{xcmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot E_{ycnj}^{(0,0)(e,e)} \right\} \\
& + \sum_{c=1} \left\{ \frac{e+1\rho_c \cdot e+1A_c \cdot e+1L}{3} E_{e+1xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{e+1ycnj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\
& \quad + \frac{e+1\rho_c \cdot e+1A_c \cdot e+1L^3}{105} E_{e+1xcmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{e+1ycnj}^{(1,1)(e,e)} \left. \right\} \\
& \quad + \frac{e+1\rho_c \cdot e+1A_c \cdot e+1L^3}{105} E_{e+1xcmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot E_{e+1ycnj}^{(0,0)(e,e)} \left. \right\} \\
& + \sum_{wp=1} \left\{ \frac{e\rho_{wp} \cdot e_{A_{wp}} \cdot eL}{3} E_{xwpmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\
& \quad + \frac{e\rho_{wp} \cdot e_{A_{wp}} \cdot eL^3}{105} E_{xwpmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \left. \right\} \\
& + \sum_{wp=1} \left\{ \frac{e+1\rho_{wp} \cdot e+1A_{wp} \cdot e+1L}{3} E_{e+1xwpmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\
& \quad + \frac{e+1\rho_{wp} \cdot e+1A_{wp} \cdot e+1L^3}{105} E_{e+1xwpmi}^{(1,1)(e,e)} \cdot F_{ynj}^{(0,0)(e,e)} \left. \right\} \\
& + \sum_{wq=1} \left\{ \frac{e\rho_{wq} \cdot e_{A_{wq}} \cdot eL}{3} F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ywqnj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\
& \quad + \frac{e\rho_{wq} \cdot e_{A_{wq}} \cdot eL^3}{105} F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{ywqnj}^{(1,1)(e,e)} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{wq=1} \left\{ \frac{e+1\rho_{wq} \cdot e+1A_{wq} \cdot e+1L}{3} F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{e+1Ywqnj}^{(0,0)(e,e)} \right. \\ \left. + \frac{e+1\rho_{wq} \cdot e+1A_{wq} \cdot e+1L^3}{105} F_{xmi}^{(0,0)(e,e)} \cdot E_{e+1Ywqnj}^{(1,1)(e,e)} \right\} \quad [11]$$

$$M_{e-1,e} = \sum_{c=1} \left\{ \frac{e\rho_c \cdot eA_c \cdot eL}{6} E_{excmi}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{excmi}^{(0,0)(e,e-1)} \right. \\ \left. - \frac{e\rho_c \cdot eA_c \cdot eL^3}{140} E_{excmi}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{excmi}^{(1,1)(e,e-1)} \right. \\ \left. - \frac{e\rho_c \cdot eA_c \cdot eL^3}{140} E_{excmi}^{(1,1)(e,e-1)} \cdot E_{excmi}^{(0,0)(e,e-1)} \right\} \\ + \sum_{wp=1} \left\{ \frac{e\rho_{wp} \cdot eA_{wp} \cdot eL}{6} E_{exwpmi}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e-1)} \right. \\ \left. - \frac{e\rho_{wp} \cdot eA_{wp} \cdot eL^3}{140} E_{exwpmi}^{(1,1)(e,e-1)} \cdot F_{xmi}^{(0,0)(e,e-1)} \right\} \\ + \sum_{wq=1} \left\{ \frac{e\rho_{wq} \cdot eA_{wq} \cdot eL}{6} F_{xmi}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{exwqm}^{(0,0)(e,e-1)} \right. \\ \left. - \frac{e\rho_{wq} \cdot eA_{wq} \cdot eL^3}{140} F_{xmi}^{(0,0)(e,e-1)} \cdot E_{exwqm}^{(1,1)(e,e-1)} \right\} \quad [12]$$

式〔7〕より固有振動数および各固有振動数に対応した未定係数が得られ、これを式〔4〕に代入することにより各次の振動モード形状を得る。

2.7 時刻歴応答解析

時刻歴応答解析は、式〔7〕の剛性マトリクスおよび質量マトリクスに減衰マトリクスおよび動荷重ベクトルを加えて運動方程式を作成し、直接積分法により解析を行う。なお、減衰マトリクスには Rayleigh 型減衰を用いる。式〔13〕に減衰マトリクス成分を、式〔14〕に動荷重ベクトル成分をそれぞれ示す。

$$C_{mn,ij} = \alpha_M \cdot M_{mn,ij} + \alpha_K \cdot K_{mn,ij} \quad [13]$$

ここに、

$$\alpha_M = 2 \cdot \omega_I \cdot \omega_J \frac{\xi_I \cdot \omega_I - \xi_J \cdot \omega_J}{\omega_I^2 - \omega_J^2}, \quad \alpha_K = \frac{2(\xi_I \cdot \omega_I - \xi_J \cdot \omega_J)}{\omega_I^2 - \omega_J^2}$$

ω_I , ξ_I はそれぞれ I 次の円振動数、減衰定数

$$eP_{mn} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} (eP_i(t) \cdot e f_{xm}(e x_i) \cdot e f_{yn}(e y_i)) \quad [14]$$

ここに、 $eP_i(t)$ は座標 $(e x_i, e y_i)$ に作用する動荷重である。

3. 有限要素法との比較

3.1 比較検討モデル

ここでは、固有値解析について、本手法と有限要素法の結果を比較し、その妥当性を検証する。比較検討用のモデルとして、以下のモデルを考える。(図-2 参照) まず周辺に大梁を有する 9m×9m スパン正方形梁付床スラブを柱で連結した 2 層モデルを考え、これを x 方向に 2 スパン連結する。さらに 2 層の中央 y 方向に壁を配置した、x 方向 2 スパン y 方向 1 スパンの 2 層梁付床スラブ(周辺境界は全て自由端)とする。なお床・梁・柱・壁部分ともに構造種別は RC 造(ヤング係数: $2.1e4[N/mm^2]$, ポアソン比: 0.167, 密度: $2400[kg/m^3]$)

とし、スラブ厚は全層 120[mm]、壁厚は 100[mm]、階高は 3[m]とした。また本手法における解析条件として、x, y 方向の形状関数は、級数の項数²⁾を(30×15)とした。比較する有限要素法は汎用ソフト ADINA を用い、床部分は 36×18 メッシュ分割の矩形シェル要素を、壁部分は 18×6 メッシュ分割の矩形シェル要素を、梁および柱部分にはビーム要素を用いた。

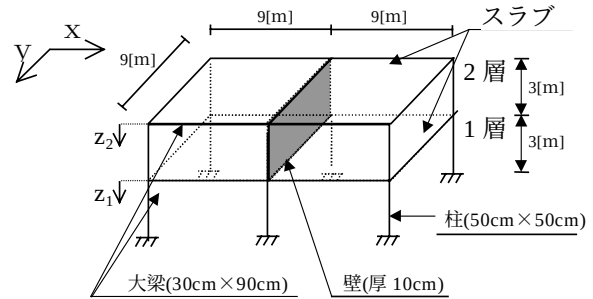


図-2 比較検討モデル概念図

3.2 固有値解析結果の比較

固有値解析を実施し、有限要素法の解と比較した。

表-1 および図-3 に対応するモード形状の次数とその時の固有振動数の比較を示す。なお、図-4, 5 に、対応するモード形状を比較した一例を示す。表-1 より、対応する各モード形状を示す次数および固有振動数ともに有限要素法とほぼ一致していることがわかる。モード形状も、その傾向は有限要素法と一致しており、良く表現できていることがわかる。振動数は有限要素法に比較して若干高めであるが、十分に許容できる範囲であると考えられる。

表-1 固有値解析結果

本解		FEM解		本解/FEM解 (%)
解析次数	振動数	解析次数	振動数	
1	6.03	1	5.74	105.1
2	6.31	2	5.96	105.8
3	6.47	3	6.20	104.4
4	6.61	4	6.29	105.0
5	11.63	5	11.37	102.3
7	12.44	6	12.05	103.2
6	12.43	7	12.06	103.1
8	12.72	8	12.44	102.3
10	13.06	9	12.57	103.9
9	12.96	10	12.62	102.7
11	13.08	11	12.78	102.3
12	13.68	12	13.21	103.5

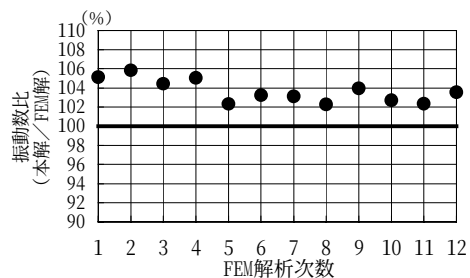


図-3 固有値解析結果の比較

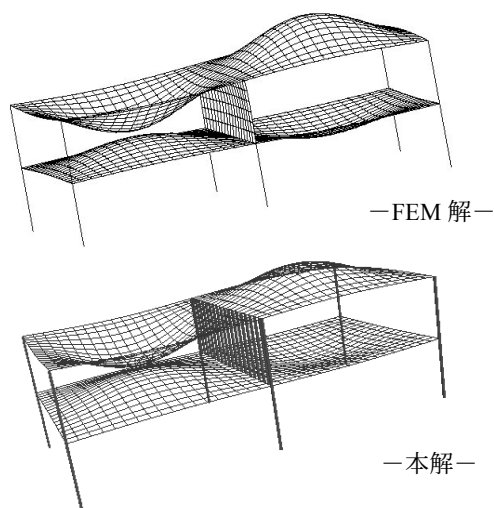


図-4 モード形状比較（1次モードの場合）
（梁は省略して表示）

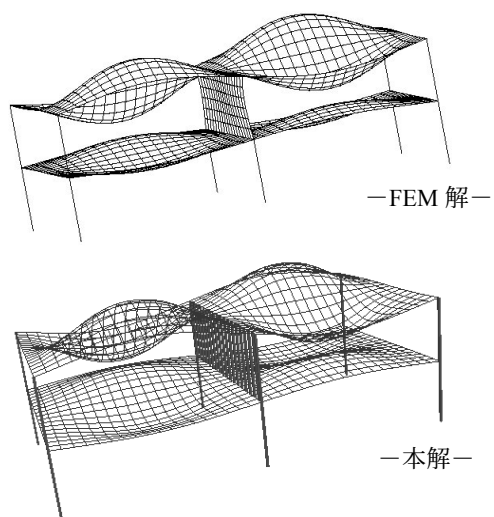


図-5 モード形状比較（5次モードの場合）
（梁は省略して表示）

4. 実測結果との比較

本手法は有限要素法に比較してデータ作成が非常に簡便で大幅な時間短縮が可能であるという利点を備えつつ、

その固有値解析結果は有限要素法と遜色ない結果が得られることを確認した。ここでは、本手法を実測結果と比較することにより、本手法の実用レベルを把握する。比較対象は、固有振動数および時刻歴応答波形とした。

4.1 実測建物概要

比較対象とした建物は、RC造2階建ての某実験施設である。図-6 に対象建物の概念図を示す。各階ともX方向、Y方向ともに1境界のみ隣接床と接しており、階高はすべて3mである。解析は、同図に示すように壁で囲まれた範囲（5.2m×4.2mスパン）を対象とした。

4.2 測定方法

加振試験は、2階およびR階床中央へのバングマシン加振による自由振動試験とした。振動測定は各測定位置に計測用の振動計を設置し、全測点同時に床の応答速度を測定した。測定位置（図-6 中★印）、バングマシン加振位置（図-6 中●印）は、2、R階共にほぼ床中央付近の同位置とし、振動伝搬を把握するため測定は2、R階同時に行った。なお、測定条件はサンプリング周期=0.002秒（500Hz）で行なった。

4.3 解析方法

本解析では図-6 中に示したように1階において4辺の壁で囲まれた1スパン範囲内を解析対象とし、解析に用いた各部材の諸元はすべて設計値を用いた。また、解析条件として、梁関数の級数の項数は前節の固有値解析結果の比較結果を参考に（15×15）とした。減衰定数は、床振動実験による床の減衰定数の例⁷⁾を参考に、1次および2次モードに相当する振動数で3%と仮定し、式〔13〕より Rayleigh 型の減衰マトリクスを作成した。時刻歴応答解析は時間刻み 0.001 秒（1000Hz）で 1.0 秒間の解析を行った。なお、応答解析に用いたバングマシンによる衝撃外力は、作用時間 0.02 秒、力積 39.2(N・sec)の三角波による衝撃荷重（図-7 参照）で模擬し、作用位置は各階のスパン中央（図-6 参照）とした。

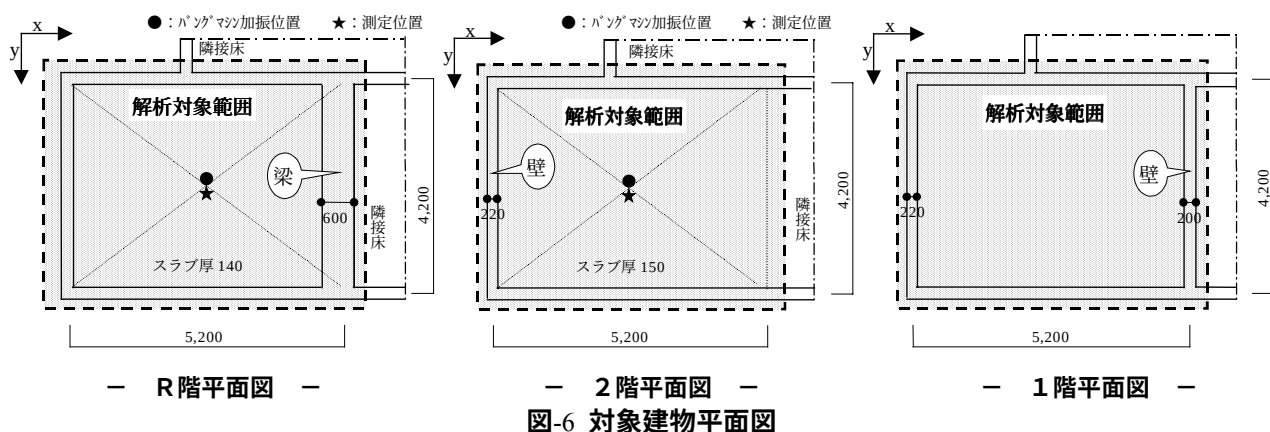


図-6 対象建物平面図

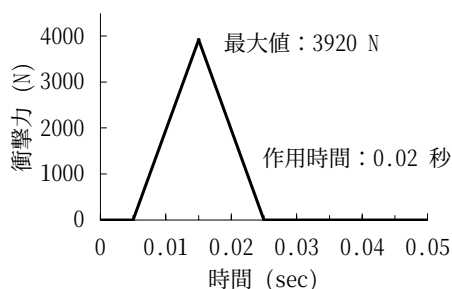


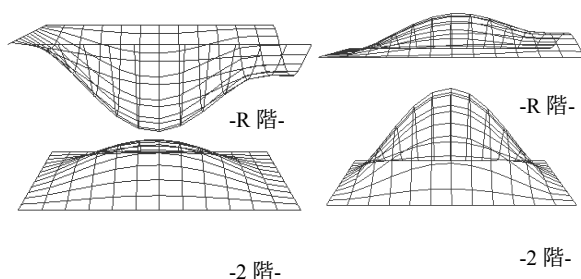
図-7 時刻歴応答波形に用いた衝撃力・時間曲線

4.4 解析結果および実測結果

表-2 に固有振動数の比較を示す。同表より、解析結果は実測結果に比較して±12%以内である。また、図-8 に解析で得られたモード形状図を示す。表-2 にも示したが、1次および3次モードは主に R 階床変形が優勢なモード形状を、2次および4次モードは主に 2 階床の変形が優

表-2 固有振動数の比較

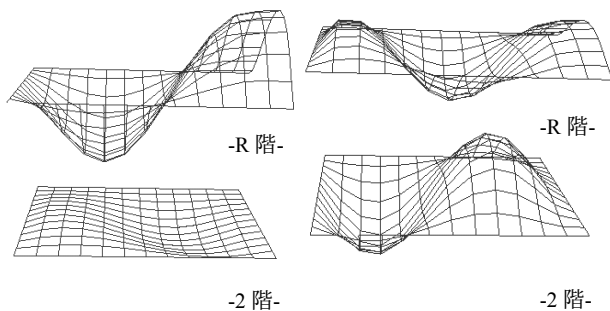
全体次数	主要モード出現階	解析結果 (Hz)	実測結果 (Hz)	解析／実測 (%)
1次	R階	34.3	39.1	88
2次	2階	38.1	36.8	104
3次	R階	46.5	51.9	90
4次	2階	58.8	64.0	92



(壁および梁は省略して表示)

— 1次モード概念図 —

— 2次モード概念図 —



(壁および梁は省略して表示)

— 3次モード概念図 —

— 4次モード概念図 —

図-8 固有値解析結果概念図

勢なモード形状を示している。このモード形状は解析結果と実測結果でよく一致していることを確認している。したがって、主要な振動数までの比較であるが、固有振動数とそのモード形状ともに解析結果は実測結果とよく対応しており、十分実用レベルであることがわかる。

図-9 および 10 に R 階床中央を加振した場合の R 階および 2 階床中央付近での変位応答波形を、図-11 および 12 に 2 階床中央を加振した場合の R 階床および 2 階床中央付近での変位応答波形を解析結果と実測値を比較して示す。また、各々の実測最大値に対する解析最大値の割合を表-3 に示す。これより、R 階床での解析応答値は加振階によらず実測値に比較して大きな値 (+18~+27%) を示し、2 階床での解析応答値は実測値に比較して (-20~+8%) を示している。先にも述べたが、ここでの時刻歴応答解析は、あくまでも設計時の諸元を用いて行った結果である。そのような条件のもとでも本解析手法による時刻歴応答解析結果は実測結果に比較して、最大値の比較ではあるが、最大で±30%程度以内に収まる結果となった。波形自体は、受振層の後半部分に見られる加振層からの揺れ戻し部分まで良く表現していることがわかる。以上より、最大変位値の比較では若干の差は見られるものの、波形そのものは実測値の傾向をよく表現しており、十分実用的であると考えられる。

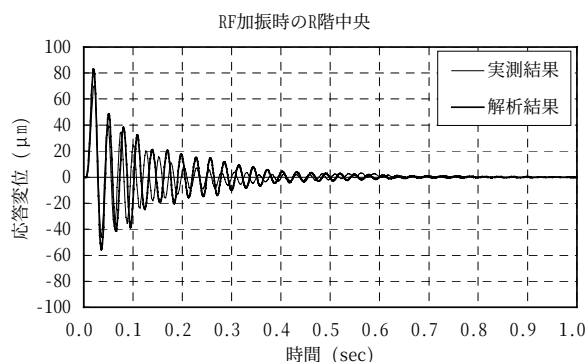


図-9 R 階床加振時の R 階床中央応答変位波形

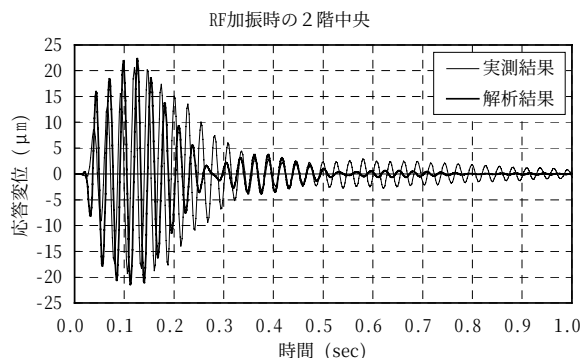


図-10 R 階床加振時の 2 階床中央応答変位波形

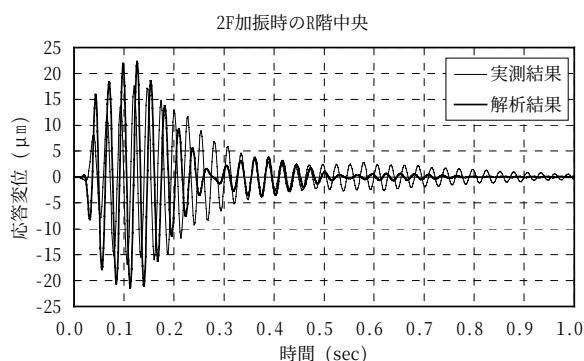


図-11 2階床加振時のR階床中央応答変位波形

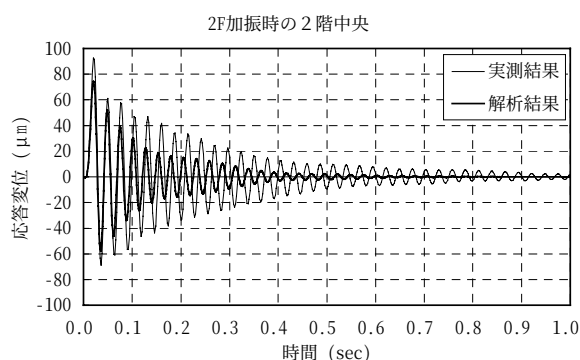


図-12 2階床加振時の2階床中央応答変位波形

表-3 最大変位の比較

加振階	応答階	最大変位 (μm)		解析／実測 (%)
		解析結果	実測結果	
R階	R階	83	70	118
	2階	22	21	108
2階	R階	22	18	127
	2階	74	93	80

5. まとめ

多層間の振動伝搬や連成効果が考慮可能な簡易解析法の確立を目指し、上下層間の振動伝搬要素として柱及び壁を考慮した簡易解析手法を定式化した。さらに提示した本解析法の妥当性を検証すべく有限要素法および実測結果と比較検証を行った。その結果以下の知見が得られた。

- (1) 固有値解析結果を有限要素法による解と比較した結果、本手法による固有振動数は、若干高めではあるが十分に許容できる範囲であることが確認された。また、対応するモード形状の出現傾向は良く一致しており、十分実用的であると考えられる。

以上より、本手法は、有限要素法に比較してメッシュ分割が不要な分データ作成が簡便となり、さらに、その解は有限要素法と遜色ない結果が得られることを確認した。

前述の内容を踏まえ、本手法を実測結果と比較した結果以下の結論が得られた。

- (2) 本手法による固有振動数と実測による固有振動数を比較した結果、主要な振動数は良く一致し、本手法の有効性が確認された。
- (3) 本手法による時刻歴解析結果と実測結果を比較した結果、最大変位値で若干の違いはあるものの、その傾向は概ね捉えていることより、振動伝搬予測としても十分実用的であることが確認された。

6. おわりに

本報では、振動伝播要素として既往の柱要素の他に、振動伝搬に対して大きな役割を果たしている壁要素を付加することを目的とした。これにより建物内伝播問題に関してはほぼ対応可能となった。しかしながら、建物内のみでなく建物外部からの振動伝搬による問題も重要な課題である。したがって今後は建物外部に振動源がある場合についても対応できるよう拡張していく予定である。

本手法に関わらず、建物内部および外部振動源に対して時刻歴解析を行うためには、検討対象とすべき振動源の波形収集が必要であり、今後はこのような振動源データの整備も随時行っていきたい。

本報は、(株)フジタとの共同研究として実施した結果をとりまとめたものである。

参考文献

- 1) 加藤泰正, 本間俊雄, 中山昌尚, 増田圭司: Rayleigh-Ritz 法を応用した床スラブの微振動解析, 日本建築学会構造系論文集 No.518, pp.147-154, 1999.4
- 2) 加藤 泰正: 環境振動設計支援のための床スラブ簡易解析手法とシステム化技術に関する研究, 東京理科大学博士論文, 2000.1
- 3) 森下真行, 齊藤芳人, 中山昌尚, 加藤泰正, 増田圭司: 多層床スラブの振動解析システムの開発 (その1, 2), 日本建築学会学術講演梗概集 D1, pp.333-336, 2001.9
- 4) 森下真行, 齊藤芳人: 多層床スラブの簡易解析システムの開発 (その1) 解析理論とその評価, 前田技術研究所報 VOL.42, pp.71-78, 2001.10
- 5) 森下真行, 齊藤芳人, 加藤泰正, 中山昌尚, 増田圭司: 多層床スラブの簡易解析システムの開発—解析理論とその評価—, 構造工学論文集 VOL.48B, pp.509-516, 2002.4
- 6) 森下真行, 齊藤芳人, 中山昌尚, 加藤泰正, 増田圭司: 多層床スラブの振動解析システムの開発 (その3, 4), 日本建築学会学術講演梗概集 D1, 2002
- 7) 日本建築学会: 建築物の振動に関する居住性能評価指針同解説, 1991 年