

土-水連成有限要素解析における水頭の空間離散化手法の拡張（その1）

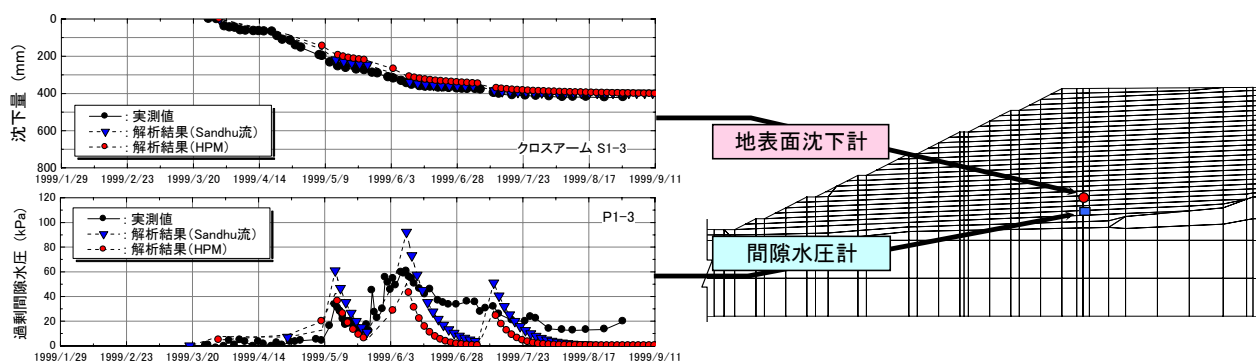
ハイブリッド型ペナルティ法を用いた水頭の空間離散化手法の適用

平田 昌史・藤山 哲雄・竹山 智英*1・飯塚 敦*2・太田 秀樹*3

Extended for spatial discretization of water head at soil-water coupled finite element analysis (Part.1)

Application of spatial discretization of water head using hybrid-type penalty method

Masafumi HIRATA, Tetsuo FUJIYAMA, Tomohide TAKEYAMA, Atsushi IIZUKA, Hideki OHTA



動態観測結果とハイブリッド型ペナルティ法(HPM)を用いた FEM 解析結果の比較

研究の目的

地盤における土-水連成有限要素解析プログラムでは、要素内の水頭が一定であるとして要素重心に水頭値を代表させる Christian 流を用いた水頭の空間離散化手法が、現在でも広く用いられている。本研究で対象とした土-水連成有限要素解析プログラム DACSAR においても、Christian 流の代表である赤井・田村(1978)の空間離散化手法を拡張して用いている。しかしながら、この DACSAR を用いて計算を実施した場合、メッシュ分割方法によっては正しく要素境界から流出する水量を計算することができない問題が生じる。本研究では、DACSAR に導入している赤井・田村による水頭の空間離散化手法について、その拡張方法の誤りを指摘するとともに、竹内ら(2000)によるハイブリッド型ペナルティ法(HPM)を水頭の空間離散化に適用することで、メッシュ分割方法への依存性を解消する手法を提案する。

技術の説明

本研究で対象としている土-水連成有限要素解析プログラム DACSAR は、研究・実務において幅広く使用されているプログラムである。このため、間隙水圧を正しく計算する手法は必須である。なお、要素重心で水頭を代表させる Christian 流を採用している他の土-水連成有限要素解析プログラムにおいても、同様の問題が生じることが懸念されるため、使用する際には注意が必要である。

主な結論

- ・ DACSAR に導入している Christian 流の代表である赤井・田村(1978)による水頭の空間離散化手法について、その拡張方法の誤りを指摘し、正しい離散化手法を有限体積法(FVM)を用いて説明した。
- ・ 土-水連成問題における水頭の空間離散化に、竹内ら(2000)によるハイブリッド型ペナルティ法を適用することで、従来のプログラムで問題となっていたメッシュ分割方法への依存性を解消する手法を提案した。
- ・ 改良したプログラムを用いた実現場の解析結果は実測値とほぼ一致しており、本手法の有効性が確認できた。

*1 国土技術政策総合研究所 港湾研究部

*2 神戸大学 自然科学系先端融合研究環 教授

*3 中央大学 研究開発機構 教授

土-水連成有限要素解析における水頭の空間離散化手法の拡張（その1） ハイブリッド型ペナルティ法を用いた水頭の空間離散化手法の適用

平 田 昌 史 藤 山 哲 雄
竹 山 智 英^{*1} 飯 塚 敦^{*2}
太 田 秀 樹^{*3}

要 旨

土-水連成有限要素解析プログラムでは、要素重心で水頭を代表させるChristian流を用いた空間離散化手法が現在でも広く用いられている。本研究で対象としている土-水連成有限要素解析プログラムDACSARにおいても、Christian流の代表である赤井・田村（1978）による水頭の空間離散化手法を、一般的なメッシュに拡張することで用いている。しかしながら、このDACSARを用いて計算を実施した場合、メッシュの分割方法によっては正しく要素境界から流出する水量を計算することができない問題が指摘されている。本研究では、DACSARに導入している赤井・田村による水頭の空間離散化手法について、その拡張方法の誤りを指摘するとともに、竹内ら（2000）によるハイブリッド型ペナルティ法（Hybrid-Type Penalty Method: HPM）を水頭の空間離散化に適用することで、メッシュ分割方法への依存性を解消する手法を提案する。このHPMを適用したプログラムを用いて、一次元圧密の要素シミュレーションと実現場のシミュレーションを実施した結果、本手法の有効性が確認できた。

キーワード 土-水連成問題／空間離散化／有限要素法／有限体積法／ハイブリッド型ペナルティ法

目 次

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1. はじめに | 4. HPMを用いた実現場のFEM再現解析 |
| 2. 赤井・田村による空間離散化の拡張と限界 | 5. おわりに |
| 3. HPMを用いた土-水連成解析手法 | |

EXTENDED FOR SPATIAL DISCRETIZATION OF WATER HEAD AT SOIL-WATER COUPLED FINITE ELEMENT ANALYSIS (PART 1)

Masafumi HIRATA Tetsuo FUJIYAMA
Tomohide TAKAYAMA Atsushi IIZUKA
Hideki OHTA

Synopsis:

In many of the soil-water coupled finite element programs including 'DACSAR', the head of the pore water pressure is typically represented by that at the center of each element in discretizing the pore water distribution in the analyzed domain. In this paper, some of the fundamental problems associated with the currently employed numerical handling of pore water distribution are improved by using a new technique called Hybrid-Type Penalty Method (HPM) proposed by Takeuchi et al. (2000). After the proposed method is verified through simulating one-dimensional consolidation process, the effectiveness is demonstrated by applying the proposed method to simulate development of pore water head in an actual embankment constructed in a site.

* 1 国土技術政策総合研究所 港湾研究部
* 3 中央大学 研究開発機構 教授

* 2 神戸大学 自然科学系先端融合研究環 教授

1. はじめに

有限要素法を中心とする解析手法の発達により、複雑な条件下におけるBiotの圧密方程式¹⁾の解析が可能となった1970年代、土-水連成問題に対する有限要素解析手法が相次いで提案された。それらは主に要素重心で水頭を代表させるChristian流²⁾と、節点で水頭を代表させるSandhu流³⁾とに大別される。この2つの有限要素連立方程式の違いは、内挿関数の選び方に起因した見かけ上のことであって両者に本質的な差異はないが、過剰間隙水圧の計算精度を考えた場合、節点で水頭を代表させるSandhu流の方が優位である。しかしながら、過剰間隙水圧が体積ひずみの拘束力として定義されることを考えると、要素重心で水頭を代表させるChristian流のほうがより自然であるため、地盤における土-水連成有限要素解析プログラムでは、Christian流を用いた水頭の空間離散化手法が、現在でも広く用いられている。

本研究で対象とした土-水連成有限要素解析プログラムDACSAR⁴⁾においても、Christian流の代表である赤井・田村⁵⁾による水頭の空間離散化手法を、一般的なメッシュに拡張することで用いている。しかしながら、このDACSARを用いて計算を実施した場合、メッシュの分割方法によっては正しく要素境界から流出する水量を計算することができない問題⁶⁾が指摘されている。これは、一般的なメッシュに拡張した際の動水勾配の差分計算方法に原因がある。

本研究では、このようなメッシュ分割方法に依存する問題を解決するため、一般的なメッシュへ拡張した場合の動水勾配の計算方法について、有限体積法(FVM)の考え方をを用いて検討している⁷⁾。しかしこの拡張方法では、節点における水頭値を近似によって求める必要があるため、近似誤差に起因するメッシュ分割方法への依存性を完全に解決することが出来ない。そこで、水頭の空間離散化手法として、竹内ら⁸⁾が提案したハイブリッド型ペナルティ法(Hybrid-type Penalty Method: HPM)を適用した土-水連成有限要素解析手法を提案する^{9), 10)}。このHPMを適用したプログラムを用いて、一次元圧密の要素シミュレーションと実現場のシミュレーションを実施することで、本手法の有効性について検討を行う。

2. 赤井・田村による空間離散化の拡張と限界

2.1 赤井・田村による水頭の空間離散化

図-1は、土-水連成問題における初期値・境界値問題を整理したものである。ここでは、水頭の空間離散化に着目していることから、釣り合い式の空間離散化は省略し、有限要素法(FEM)を用いた連続式の空間離散化の手順について述べる。連続式に、任意の重み関数 δh (但し、水頭境界上では $\delta h = 0$)を乗じて領域 V で積分すると、以下のような弱形式が得られる。

Governing Equations	
equilibrium equation	: $\text{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T$
strain – displacement relation	: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = -(\nabla \dot{\mathbf{u}})^S$
constitutive equation	: $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^i = \mathbf{D}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$
effective stress principle	: $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^i = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{p}_w \mathbf{1}$
Darcy's law	: $\mathbf{v} = -\mathbf{k} \cdot \text{grad}(h)$
total water head	: $h = p_w / \gamma_w + \Omega$
continuity condition	: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v = \text{div} \mathbf{v}$
Boundary Conditions	
stress boundary	: $\dot{\mathbf{t}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \mathbf{n} \text{ (on } S_\sigma \text{)}$
geometric boundary	: $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}} \text{ (on } S_u \text{)}$
velocity boundary	: $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \text{ (on } S_q \text{)}$
head boundary	: $\bar{h} = h \text{ (on } S_h \text{)}$
Initial Value	
initial stress	: $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} _{t=0}$
initial total water head	: $\bar{h} = h _{t=0}$

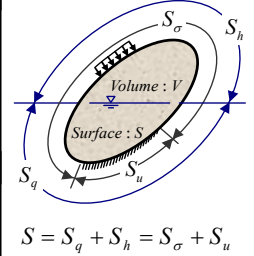


図-1 土-水連成の初期値・境界値問題

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v \cdot \delta h dV - \int_{S_q} \bar{\mathbf{q}} \delta h dV - \int_V \mathbf{k} \cdot \text{grad}(h) \text{grad}(\delta h) dV = 0 \quad [1]$$

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v$ は体積ひずみ増分、 $\mathbf{k}$ は透水係数テンソル、 h は全水頭、 $\text{grad}(h)$ は動水勾配を表している。ここで、場の離散化として領域 V を M 個の要素に分割したと仮定すると、式[1]に示した弱形式は、

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \int_{V_e} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v \cdot \delta h dV - \int_{S_{qe}} \bar{\mathbf{q}} \delta h dV - \int_{V_e} \mathbf{k} \cdot \text{grad}(h) \text{grad}(\delta h) dV \right\} = 0 \quad [2]$$

となる。分割した部分領域 V_e に対して、任意の全水頭 h は内挿関数 $\mathbf{N}_h$ によって全水頭ベクトル $\mathbf{h}^{me}$ に離散化されるものとし、重み関数 δh についても同じ内挿関数 $\mathbf{N}_h$ で離散化されるものとする(Galerkin法)。

$$h = \mathbf{N}_h \mathbf{h}^{me}, \quad \text{grad}(h) = \mathbf{B}_h \mathbf{h}^{me} \\ \delta h = \mathbf{N}_h \delta \mathbf{h}^{me}, \quad \text{grad}(\delta h) = \mathbf{B}_h \delta \mathbf{h}^{me} \quad [3]$$

ここで、領域 V における全水頭ベクトルを $\mathbf{h}^m$ とすると、分割した部分領域 V_e の全水頭ベクトル $\mathbf{h}^{me}$ との関係は、

$$\mathbf{h}^{me} = \mathbf{A}_{he} \mathbf{h}^m, \quad \delta \mathbf{h}^{me} = \mathbf{A}_{he} \delta \mathbf{h}^m \quad [4]$$

と表される。 $\mathbf{A}_{he}$ は領域 V の全水頭ベクトル $\mathbf{h}^m$ が持つ自由度 m と、部分領域 V_e の全水頭ベクトル $\mathbf{h}^{me}$ が持つ自由度 me を結びつけるマトリクスである。式[2]に式[3]および式[4]を代入し、重み関数 $\delta \mathbf{h}^m$ の任意性を考慮すると、

$$\sum_{e=1}^M \mathbf{A}_{he}^T \left\{ \int_{V_e} \mathbf{N}_h^T \mathbf{B}_v dV \cdot \dot{\mathbf{u}}^{ne} - \int_{S_{qe}} \mathbf{N}_h^T \bar{\mathbf{q}} dS - \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{B}_h dV \cdot \gamma_w \mathbf{h}^{me} \right\} = 0 \quad [5]$$

となる．ここで， γ_w は間隙水の単位体積重量である．さらに式〔5〕を整理すると，

$$\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{u}}^n - \mathbf{K}_h \gamma_w \mathbf{h}^m = \dot{\mathbf{Q}} \quad [6]$$

と表される．これが FEM によって空間離散化された連続式である．なお，式〔6〕中の各マトリクスは以下の通りであり， $\mathbf{A}_e$ は，領域 V の変位増分ベクトル $\dot{\mathbf{u}}^n$ が持つ自由度 n と，部分領域 V_e の変位増分ベクトル $\dot{\mathbf{u}}^{ne}$ が持つ自由度 ne を結びつけるマトリクスである．

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v &= \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_{he}^T \int_{V_e} \mathbf{N}_h^T \mathbf{B}_v dV \mathbf{A}_e \\ \mathbf{K}_h &= \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_{he}^T \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{B}_h dV \mathbf{A}_{he} \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_{he}^T \int_{S_{qe}} \mathbf{N}_{he}^T \bar{q} dS \end{aligned} \quad [7]$$

式〔6〕に示した空間離散化された連続式に対して，水頭を要素重心 1 点で代表させる Christian 流を適用すると，式〔3〕に示した内挿関数 $\mathbf{N}_h$ マトリクスは，要素内の全水頭が一定であることから定数となり，その微分である $\mathbf{B}_h$ マトリクスはゼロとなる．また，試験関数 δh も要素重心で代表されることから，境界における水理条件は取り除かれる．以上の条件から式〔6〕は，

$$\sum_{e=1}^M \mathbf{A}_{he}^T \left\{ \int_{V_e} \mathbf{B}_v dV \dot{\mathbf{u}}^{ne} - \int_{S_{qe}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right\} = \mathbf{0} \quad [8]$$

となる．式〔8〕の左辺第 2 項は要素境界から流出入する間隙水の収支を示しており，以下のように表される．

$$\int_{S_{qe}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_{qe}} \mathbf{k} \cdot \text{grad}(h) \cdot \mathbf{n} dS \quad [9]$$

赤井・田村 (1978) は，式〔9〕に示した要素境界 i から流出入する間隙水を具体的に求めるために，図-2 に示すようなメッシュが直交する特殊な場の離散化を設定している．この場合，要素境界 i における動水勾配 $\text{grad}(h)$ は，隣接する要素重心の距離 L_i とその水頭差 $(h^{mi} - h^m)$ を用いて，

$$\text{grad}(h) = \frac{\partial h}{\partial L_i} = \frac{h^{mi} - h^m}{L_i} \quad [10]$$

と表されることになる．他の要素境界に対しても動水勾配を同様に求めると，式〔9〕は，

$$- \int_{S_{qe}} \mathbf{k} \cdot \text{grad}(h) \cdot \mathbf{n} dS = \alpha \gamma_w h^m - \sum_{i=1}^4 \alpha_i \gamma_w h^{mi} \quad [11]$$

$$\alpha_i = \frac{k}{\gamma_w} \frac{s_i}{L_i}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \quad [12]$$

となる．

以上のように赤井・田村による水頭の空間離散化式は，要素境界から流出入する間隙水の収支を差分によって求めるため，差分法と一致する FEM の特殊なケースであるといえる．

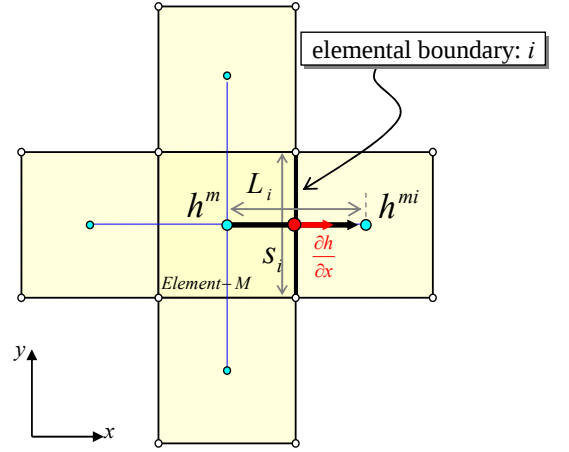


図-2 赤井・田村が用いた場の離散化

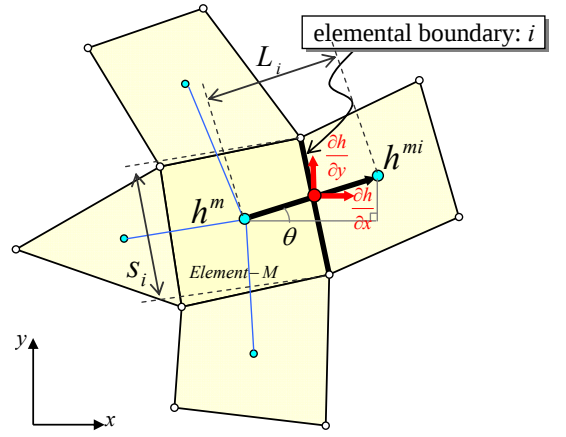


図-3 DACSAR で用いている場の離散化

2.2 DACSAR における拡張方法の誤り

赤井・田村による水頭の空間離散化は，図-2 に示したようなメッシュが直交する特殊な場の離散化を想定しているため，一般的な場の離散化（非構造格子）には適用できない．本研究で対象とした土-水連成有限要素解析プログラム DACSAR では，図-3 に示すような一般的な場の離散化を設定し，隣接する要素重心の距離 L_i と角度 θ ，および水頭差 $(h^{mi} - h^m)$ を用いて，動水勾配の差分計算を以下のように拡張して計算している．

$$\text{grad}(h) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h^{mi} - h^m}{L_i} \cdot \sin \theta \\ \frac{h^{mi} - h^m}{L_i} \cdot \cos \theta \end{Bmatrix} \quad [13]$$

しかしながら，従来の DACSAR で用いていた式〔13〕の差分計算の拡張方法は誤りである．このことは，次に示す有限体積法（FVM）を用いた空間離散化の観点から見ると明らかである．

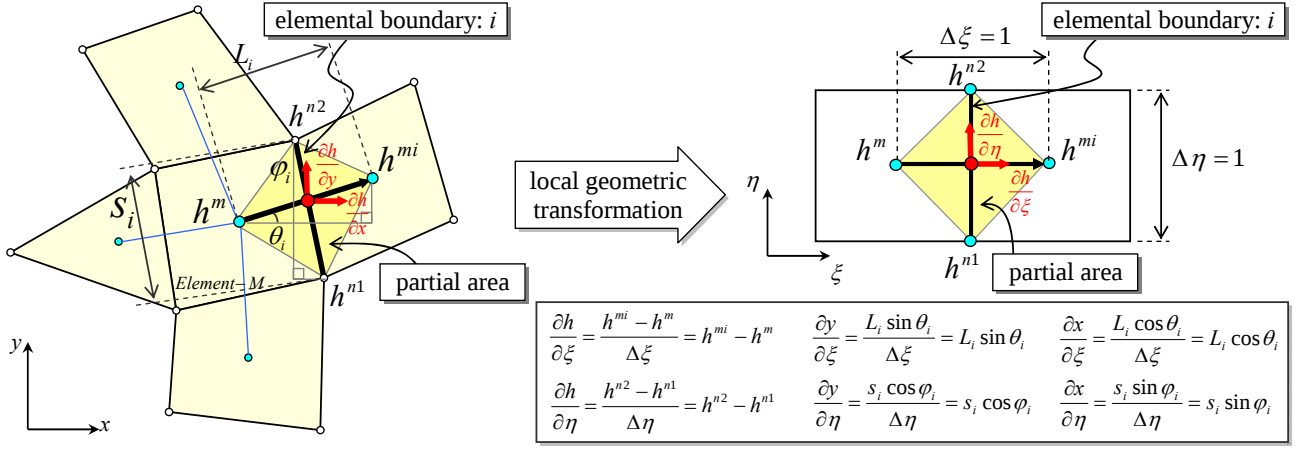


図-4 一般的な場の離散化（メッシュ）と部分領域の局所座標変換

2. 3 有限体積法（FVM）を用いた拡張方法

有限体積法（FVM）は、非ガラーキン重みを用いた重み付き残差法である。今、重み係数を w として領域 V で積分すると、以下の弱形式が得られる。

$$\int_V \dot{\varepsilon}_v \cdot w dV - \int_{S_q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot w dS = 0 \quad [14]$$

この式 [14] に対して、式 [2] と同様に領域 V を M 個の要素に分割したと仮定する。

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \int_{V_e} \dot{\varepsilon}_v \cdot w dV - \int_{S_{qe}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot w dS \right\} = 0 \quad [15]$$

FVM では、各部分領域（各要素内）で独立して連続式が成り立つと仮定することから、重み係数 w は要素内で 1、その他はゼロになる。このような係数をマトリクス $\mathbf{M}_{he}$ で表すと式 [15] は、

$$\sum_{e=1}^M \mathbf{M}_{he}^T \left\{ \int_{V_e} \mathbf{B}_v dV \dot{\mathbf{u}}^{ne} - \int_{S_{qe}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right\} = 0 \quad [16]$$

となる。 $\mathbf{M}_{he}$ は、式 [8] に示したマトリクス $\mathbf{A}_{he}$ と等価であることから、式 [16] は式 [8] に示した FEM による空間離散化式と完全に一致することになる。

以上のことから、要素重心で水頭値を代表させる Christian 流は FVM と一致する FEM の特殊なケースであり、さらに赤井・田村による水頭の空間離散化手法は差分法と一致する FVM の特殊なケースであるといえる。赤井・田村による水頭の空間離散化式を一般的なメッシュに拡張することは、FVM を用いて空間離散化することに等しい。

FVM を用いた場合、要素境界 i の動水勾配は、隣接する要素重心と要素境界上の節点から形成される部分領域に対して求めることになる。図-4 に示すように、要素境界上の節点における水頭値を h^{n1} 、 h^{n2} と仮定し局所座標変換を行うと、部分領域の動水勾配は次のようになる。

$$\text{grad}(h) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad [17]$$

ここで、 $\det[J]$ はヤコビアンであり、

$$\det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad [18]$$

である。図-4 より、要素境界 i における動水勾配を具体的に求めると、式 [17] および式 [18] より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{(h^{mi} - h^m) \cos \varphi_i}{L_i \cos(\varphi_i - \theta_i)} - \frac{(h^{n2} - h^{n1}) \sin \theta_i}{s_i \cos(\varphi_i - \theta_i)} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -\frac{(h^{mi} - h^m) \sin \varphi_i}{L_i \cos(\varphi_i - \theta_i)} + \frac{(h^{n2} - h^{n1}) \cos \theta_i}{s_i \cos(\varphi_i - \theta_i)} \end{aligned} \quad [19]$$

となる。 φ_i は要素境界の角度、 θ_i は隣接する要素重心の角度である。その他の要素境界に対しても、動水勾配は同様に求められるため、式 [9] に示した要素境界から流入する間隙水の量は、

$$\begin{aligned} & - \int_{S_{qe}} \mathbf{k} \cdot \text{grad}(h) \cdot \mathbf{n} dS \\ & = \alpha \gamma_w h^m - \sum_{i=1}^4 \alpha_i \gamma_w h^{mi} + \sum_{i=1}^4 \beta_i \gamma_w (h^{ni+1} - h^{ni}) \end{aligned} \quad [20]$$

となる。式 [20] における係数 α_i 、 α および β_i は、

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{k_x s_i}{\gamma_w L_i} \frac{\cos^2 \varphi_i}{\cos(\varphi_i - \theta_i)} + \frac{k_y s_i}{\gamma_w L_i} \frac{\sin^2 \varphi_i}{\cos(\varphi_i - \theta_i)} \\ \alpha &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i \\ \beta_i &= \frac{k_x \sin \theta_i \cos \varphi_i}{\gamma_w \cos(\varphi_i - \theta_i)} + \frac{k_y \cos \theta_i \sin \varphi_i}{\gamma_w \cos(\varphi_i - \theta_i)} \end{aligned} \quad [21]$$

である。ちなみに、式 [21] に対して図-2 に示した直交する特殊なメッシュを適用（ $\varphi_i = \theta_i = 0$ ）して、透水係数の異方性を無視（ $k_x = k_y = k$ ）すれば、

$$\alpha_i = \frac{k}{\gamma_w} \frac{s_i}{L_i}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^4 \alpha_i, \quad \beta_i = 0 \quad [22]$$

となり、赤井・田村による水頭の空間離散化式と完全に一致することがわかる。

このように、一般的なメッシュに対する要素境界の正

しい動水勾配は、式〔17〕～式〔19〕のように表され、その計算には節点上の水頭値が必要である。水頭値はポテンシャルであるため、要素境界の動水勾配は部分領域平面の傾きとなり、2点の水頭値のみでは平面の傾きを求めることができない。竹山ら⁶⁾が指摘した、メッシュ分割方法によって正しく要素境界から流出する水量を計算できない従来のDACSARの問題点は、式〔13〕に示したように、隣接する要素重心の水頭値2点のみから動水勾配を求める差分計算⁴⁾が原因である。

2.4 節点における水頭値の近似方法

図-4に示したように、一般的なメッシュに対して要素境界の動水勾配を計算するためには、節点における水頭値が必要となる。要素重心に水頭値を代表させるChristian流の場合、節点における水頭値を直接求めることができないため、節点上の水頭値は近似によって求める必要がある。

節点上的水頭値の近似方法としては、さまざまな方法が考えられるが、ここでは図-5に示した重みつき平均値による最も単純な近似方法を用いる。

$$h^n = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^N w_j h^{mj} \quad [23]$$

式〔23〕中の N は節点 n を囲む要素数、 w_j は重み、 W は重みの合計である。重み w_j には、要素面積 A^{mj} の逆数を用いた。

$$w_j = \frac{1}{A^{mj}}, \quad W = \sum_{j=1}^n w_j \quad [24]$$

以上のような水頭の近似式と、式〔20〕に示したFVMから誘導された拡張方法を土-水連成有限要素解析プログラムDACSARに導入することにより、プログラムの改良を行った。なお竹山ら⁶⁾は、要素内の水頭値を一次関数によって近似することでプログラムの改良を行っているが、基本的にはFVMによる拡張方法と内容は同じである。この竹山らの方法では節点上的水頭値を、周囲の要素が持つ水頭値を線形補間することで近似している。

2.5 プログラムの検証とその適用限界

FVMを用いて改良したプログラムの検証として、図-6に示した解析条件を用いて、一次元圧密のシミュレーションを実施し、Terzaghiの理論解との比較を行った。

図-7は、メッシュ分割方法を変えた場合の解析結果である。この図を見ると、Mesh-01の解析結果は理論解とよく一致しているが、排水方向にメッシュを粗くしたMesh-02の場合には、解析結果は理論解から若干ずれて一致していない。図-8は排水方向にメッシュを粗くしたMesh-02に対して、 x 方向の透水係数を y 方向の2倍および5倍にした場合の解析結果である。一次元圧密であるため、本来ならば x 方向の透水係数は計算に影響を与えないはずであるが、 x 方向の透水係数を大きくすると計算結果は

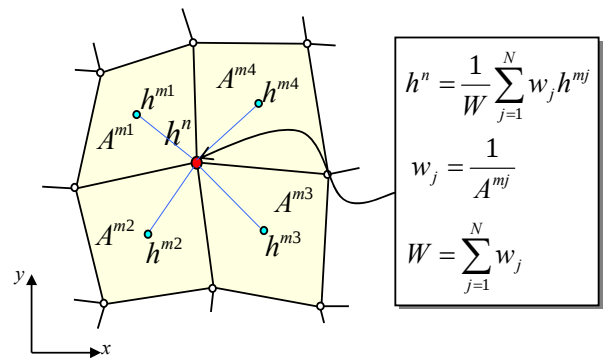


図-5 節点における水頭値の近似方法

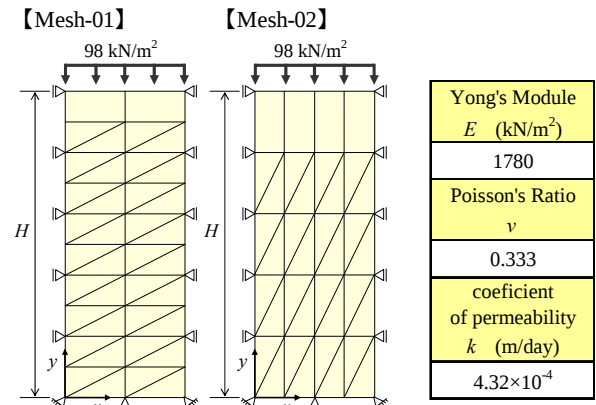


図-6 一次元圧密シミュレーションの解析条件

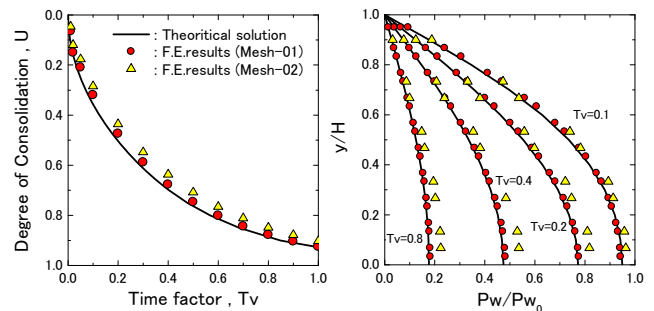


図-7 FVMを用いた解析結果（メッシュの比較）

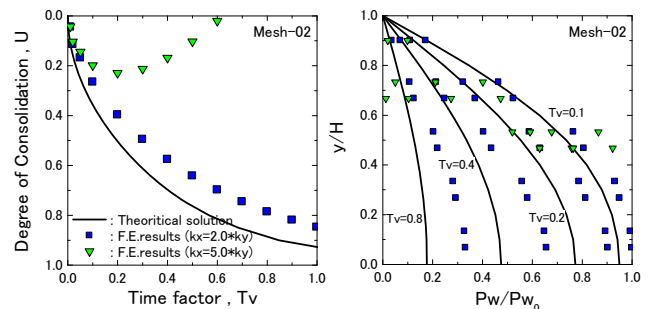


図-8 FVMを用いた解析結果（透水係数の比較）

理論解と一致しなくなり、透水係数が5倍の場合には計算が発散している。

以上のようにMesh-02において解析結果が理論解と一致しない問題は、節点上的水頭値の近似誤差に原因があると考えられる。水頭の分布は非線形であるため、排水方向にメッシュが粗くなると、当然この近似誤差も大き

くなる．さらに透水係数の異方性を考慮すると，近似誤差が増長される．このような問題を回避するためには，節点の水頭値を未知数として計算する Sandhu 流を用いるか，あるいは節点上の水頭値を必要としない手法を用いる必要がある．

3. HPM を用いた土-水連成解析手法

3.1 HPM を用いた水頭の空間離散化

赤井・田村による水頭の空間離散化式を一般的なメッシュへ拡張した場合，節点における水頭値の近似誤差に起因するメッシュ分割方法への依存性が生じた．この問題を回避するために，竹内ら⁸⁾によって提案されたハイブリッド型ペナルティ法（HPM）を連続式の空間離散化に導入する．このHPMは，連続式に対してハイブリッド型の変分原理¹¹⁾の考え方を導入し，さらに要素境界における付帯条件式のLagrangeの未定乗数 λ に，ペナルティによる近似を導入する手法である．この手法では，要素毎に独立な水頭値と，要素内で一定の動水勾配の線形場を仮定する．このため，要素境界上の動水勾配を評価する上で，節点における水頭値は不要となる．

図-9 に示すように，隣接する要素 a , b における境界面 S_{ab} 上の水頭値を $\hat{h}^a$, $\hat{h}^b$ とする．ここで，ハイブリッド型の変分原理に基づき，境界面 S_{ab} の付帯条件である $\hat{h}^a = \hat{h}^b$ を，境界面 S_{ab} 上で共通な Lagrange の未定乗数 λ を用いて，

$$H_{ab} = \delta \int_{S_{ab}} \lambda (\hat{h}^a - \hat{h}^b) dS \quad [25]$$

と置くことで連続性を緩和する．この式 [25] における Lagrange の未定乗数 λ は，境界面上の流量を意味することから，ペナルティ P と境界面 S_{ab} における相対的な水頭差 ϕ_{ab} を用いて以下のように表すことができる．

$$\lambda = P \cdot (\hat{h}^a - \hat{h}^b) = P \cdot \phi_{ab} \quad [26]$$

なお，ペナルティ P の値は任意であるが，ここでは竹内らと同様に透水係数 k の 10^8 倍の値を用いることにする．場の離散化として領域 V を M 個の要素に分割したと仮定し，隣接する要素境界の数が N 個であるとする．式 [25] および式 [26] より式 [1] は，

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left\{ \int_{V_e} \dot{\epsilon}_v \cdot \delta h dV - \int_{S_{qe}} \bar{q} \delta h dS \right. \\ & \quad \left. - \int_{V_e} \mathbf{k} \cdot \text{grad}(h) \text{grad}(\delta h) dV \right\} \\ & \quad + \sum_{ab=1}^N \left\{ \int_{S_{ab}} \phi_{ab} \cdot P \cdot \phi_{ab} dS \right\} = 0 \end{aligned} \quad [27]$$

となり，ハイブリッド型の残差方程式が得られる．

一方，要素内では一定の動水勾配による線形場を仮定している．式 [27] における要素内の水頭 h は，2次元の場合，要素重心で代表される水頭値 h_G と動水勾配 i_x , i_y を用いて，

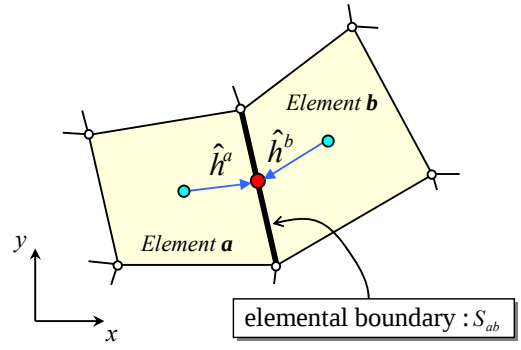


図-9 隣接する要素境界

$$h = h_G + (x - x_G) \cdot i_x + (y - y_G) \cdot i_y \quad [28]$$

と表される．この水頭 h は要素毎に独立に設定されることから，

$$h = \mathbf{N}_h \mathbf{H}^{me} \quad [29]$$

と置き，任意の重み関数 δh についても同様に表せるものとする（Galerkin 法）．式 [29] における各マトリクスは，

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_h &= \begin{bmatrix} 1 & (x - x_G) & (y - y_G) \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}^{me} &= \begin{bmatrix} h_G & i_x & i_y \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad [30]$$

である． $\mathbf{H}^{me}$ は要素毎における自由度のベクトルであるが，要素重心における水頭値のほかに，動水勾配も直接自由度として取り扱うことが本手法の特徴である．なお，要素内の動水勾配は式 [29] より，

$$\text{grad}(h) = \mathbf{B}_h \mathbf{H}^{me} \quad [31]$$

と表される．式 [26] における境界面 S_{ab} の相対的な水頭差 ϕ_{ab} については，境界毎の自由度 mab を持つベクトル $\mathbf{H}^{mab}$ を用いて次のように置く．

$$\phi_{ab} = \mathbf{N}_h \mathbf{H}^{me} |_a - \mathbf{N}_h \mathbf{H}^{me} |_b = \mathbf{N}_{hab} \mathbf{H}^{mab} \quad [32]$$

これらの式を用いて，式 [27] に示した残差方程式を整理すると，

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \delta \mathbf{H}^{meT} \left\{ \int_{V_e} \mathbf{N}_h^T \mathbf{B}_v \cdot \dot{\mathbf{u}}^{ne} dV - \int_{S_e} \mathbf{N}_h^T \bar{q} dS \right. \\ & \quad \left. - \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{B}_h \cdot \gamma_w \mathbf{H}^{me} dV \right\} \\ & \quad + \sum_{ab=1}^N \delta \mathbf{H}^{mabT} \left\{ \int_{S_{ab}} \mathbf{N}_{hab}^T P \mathbf{N}_{hab} \cdot \mathbf{H}^{mab} dS \right\} = 0 \end{aligned} \quad [33]$$

となる．ここで，領域全体の自由度 m を持つベクトルを $\mathbf{H}^m$ とし，各要素のベクトル $\mathbf{H}^{me}$ および各要素境界のベクトル $\mathbf{H}^{mab}$ を，式 [4] と同様に定数マトリクス $\mathbf{A}_{he}$ および $\mathbf{M}_{he}$ を用いて以下のように置く．

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{me} &= \mathbf{A}_{he} \mathbf{H}^m, & \mathbf{H}^{mab} &= \mathbf{M}_{he} \mathbf{H}^m \\ \delta \mathbf{H}^{me} &= \mathbf{A}_{he} \delta \mathbf{H}^m, & \delta \mathbf{H}^{mab} &= \mathbf{M}_{he} \delta \mathbf{H}^m \end{aligned} \quad [34]$$

式 [34] を式 [33] に代入し，重み関数 $\delta \mathbf{H}^m$ の任意性を考慮すれば，最終的に以下のような連続式の空間離散化

方程式が得られる。

$$\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{u}}^n - (\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{hs}) \gamma_w \mathbf{H}^m = \dot{\mathbf{Q}} \quad [35]$$

式〔6〕に示した連続式の空間離散化式と比較すると、HPM を適用することにより $\mathbf{K}_{hs}$ マトリクスの項が増えている。 $\mathbf{K}_{hs}$ マトリクスは式〔33〕より、

$$\mathbf{K}_{hs} = \sum_{ab=1}^N \mathbf{M}_{he}^T \int_{S_{ab}} \mathbf{N}_{hab}^T \mathbf{P} \mathbf{N}_{hab} dS \mathbf{M}_{he} \quad [36]$$

である。式〔35〕中のその他のマトリクスについては、式〔7〕に示したものと同一である。

3.2 HPM を用いた土-水連成問題の全体剛性方程式

図-1 に示した土-水連成の境界値問題を解くためには、離散化された連続式のほかに、離散化された釣り合い式が必要である。釣り合い式の空間離散化式には、従来通り以下の式⁴⁾を用いる。

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{K}_v^T \gamma_w \dot{\mathbf{H}}^m = \dot{\mathbf{F}} \quad [37]$$

式中の各マトリクスは次の通りである。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{A}_e \\ \dot{\mathbf{F}} &= \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_e^T \int_{S_e} \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{t}} dS \end{aligned} \quad [38]$$

この釣り合い式の空間離散化式と、式〔35〕に示した連続式の空間離散化式に対して、 $t = t$ （既知）から $t = t + \Delta t$ （未知）の間で線形近似（時間離散化）する。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^n &\approx \frac{\Delta \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^n|_{t+\Delta t} - \mathbf{u}^n|_t}{\Delta t} \\ \dot{\mathbf{H}}^m &\approx \frac{\Delta \mathbf{H}^m}{\Delta t} = \frac{\mathbf{H}^m|_{t+\Delta t} - \mathbf{H}^m|_t}{\Delta t} \\ \mathbf{H}^m &= (1 - \theta) \mathbf{H}^m|_t + \theta \mathbf{H}^m|_{t+\Delta t} \quad (0 \leq \theta \leq 1) \end{aligned} \quad [39]$$

この式〔39〕を、式〔35〕および式〔37〕に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} & \mathbf{K}_v^T \\ \mathbf{K}_v & -\theta \Delta t (\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{hs}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{u}^n \\ \gamma_w \mathbf{H}^m|_{t+\Delta t} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \Delta t \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{K}_v^T \gamma_w \mathbf{H}^m|_t \\ \Delta t \dot{\mathbf{Q}} + (1 - \theta) \Delta t (\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{hs}) \gamma_w \mathbf{H}^m|_t \end{array} \right\} \end{aligned} \quad [40]$$

という土-水連成の全体剛性方程式が得られる。この全体剛性方程式を土-水連成有限要素解析プログラム DACSAR に導入することで、プログラムの改良を行った。なお、初期の動水勾配をゼロとし、後退型（ $\theta = 1$ ）を用いて陽的に解けば、従来の DACSAR と同じ初期条件・境界条件で、式〔35〕に示した剛性方程式を解くことができるため、従来の DACSAR の入力データをそのまま使用することができる。

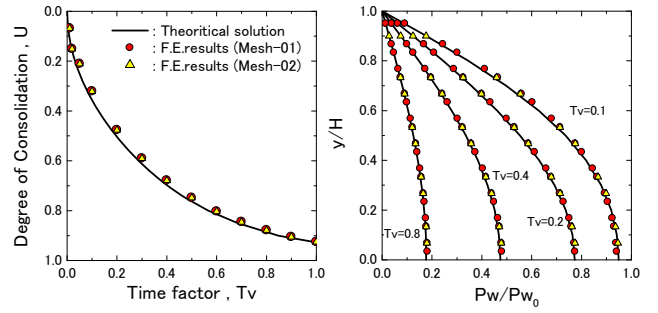


図-10 HPM を用いた解析結果（メッシュの比較）

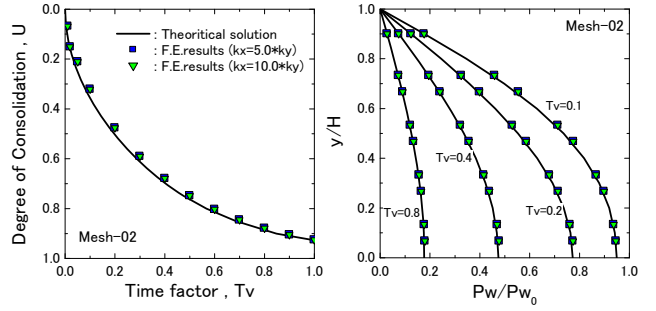


図-11 HPM を用いた解析結果（透水係数の比較）

3.3 HPM を適用したプログラムの検証

HPM を適用したプログラムの検証として、一次元圧密シミュレーションを実施した。なお、FVM を用いたプログラムと比較するため、図-6 に示したシミュレーションと同じ条件としている。

図-10 は、メッシュ分割を変えた場合の解析結果である。FVM を用いたプログラムでは、解析結果が排水方向のメッシュ分割に依存し理論解と一致していなかったが、HPM を適用したプログラムを用いた場合、解析結果が理論解と一致している。図-11 は、図-6 に示した Mesh-02 に対して x 方向の透水係数を y 方向の 5 倍、10 倍にした場合の解析結果である。FVM を用いたプログラムでは、 x 方向の透水係数が 5 倍になると計算が発散していたが、HPM を適用したプログラムでは、透水係数が 10 倍の場合でも理論解と一致しており、 x 方向の透水係数の影響を受けていないことがわかる。以上のように、水頭の空間離散化に対して HPM を適用することにより、メッシュ分割方法に依存する問題は解消された。

4. HPM を用いた実現場の FEM 再現解析

4.1 解析条件

過去に実施した実現場の FEM 解析に対して、HPM を適用したプログラムを用いた解析を再度実施することで、本プログラムの有効性を検証する。

ここで取り上げる現場は、能登空港用地造成工事^{12), 13)}であり、工事に先駆けて実施された盛土高さ約 35m の大型試験盛土を解析対象とした。本現場では、盛土材として高含水比の粘性土が用いられることから、盛土内には

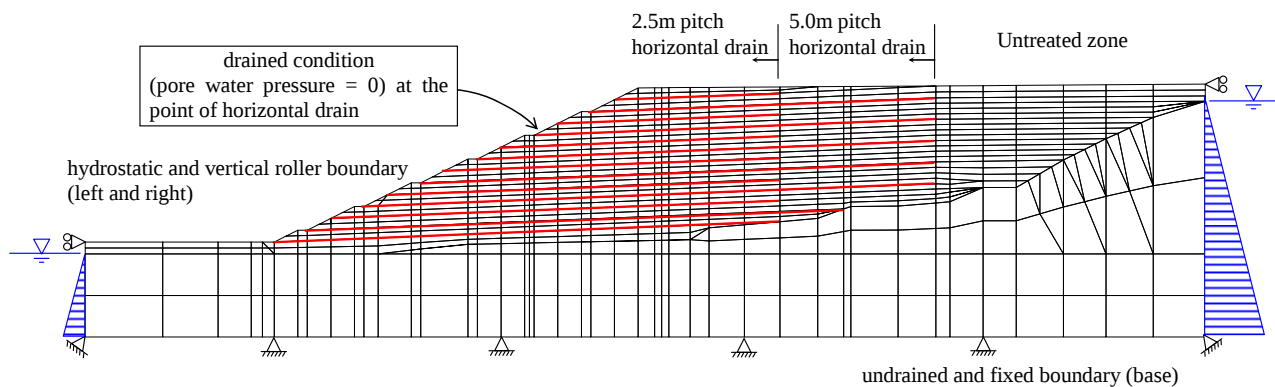


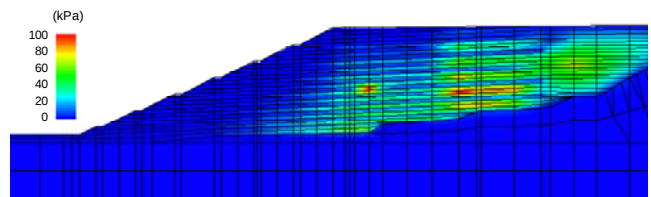
図-12 FEM 解析に用いたメッシュ図と境界条件

圧密促進のための人工水平排水材が敷設されている。図-12 にFEM解析に用いたメッシュ図を示す。メッシュ図を見ると、基盤や人工排水材敷設の影響により、微妙な傾斜や三角形要素を含んだ複雑なメッシュ形状をしている。従来のプログラムを用いた場合には、メッシュ分割方法への依存性が問題となることが予想される事例である。また人工排水材の効果は、千鳥配置、ドレーンレジスタンス、上載圧によるつぶれの影響を考慮し、盛土水平方向に等価透水係数を与えることで表現していることから、透水係数の異方性により誤差が増幅されることも考えられる。過去に実施したFEM解析では、このような問題を避けるため、水頭を節点で代表させるSandhu流を組み込んだプログラムが用いられている。

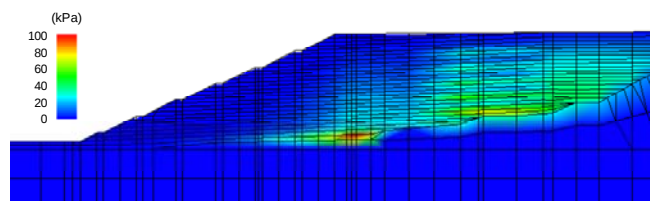
表-1 は、FEM解析に用いた盛土材の材料パラメータである。過去に実施したFEM解析では、粘性土で構成される盛土材に対して関口・太田モデル¹⁴⁾ が用いられていたが、ここでは関口・太田モデルの特異点¹⁵⁾ の影響を排除するために、修正Cam-Clayモデルを用いた。また、締固めた盛土材が過圧密状態であることから、圧密沈下をより忠実に再現するため修正Cam-Clayモデルに下負荷面¹⁶⁾ を考慮している。

表-1 解析に用いた盛土材のパラメータ一覧

unit weight	γ_t	:	15.5	kN/m ³
initial void ratio	e_0	:	2.208	
compression index	λ	:	0.271	
irreversibility ratio	A	:	0.821	
preconsolidation vertical pressure	σ_{v0}'	:	200.0	kN/m ²
effective overburden pressure	σ_{w0}'	:	38.7	kN/m ²
coefficient of earth pressure at rest	K_0	:	0.59	
coefficient of in-situ earth pressure at rest	K_i	:	1.00	
effective Poisson's ratio	ν'	:	0.37	
critical state parameter	M	:	1.21	
subloading parameter	m	:	0.50	
coefficient of permeability	k	:	1.95×10^{-5}	cm/sec



(a) Sandhu 流による解析結果



(b) HPM による解析結果

図-13 盛土完了時点の過剰間隙水圧分布図

4.2 解析結果の比較

図-13 は、盛土完了直後の過剰間隙水圧分布図である。節点に水頭値を代表させる Sandhu 流を組み込んだプログラムと、HPM を適用したプログラムを用いた解析結果を比較すると、HPM による解析結果の方が平均的な分布図となっているが、これは内挿関数に起因する離散点の違いによるものと考えられ、過剰間隙水圧の分布傾向はほぼ等しいといえる。なお、FVM を用いたプログラムで解析を実施した場合、メッシュ分割方法への依存性により過剰間隙水圧が局所的に集中し、図-14 に示す変形図のように計算が途中で発散している。

図-15 は、代表的な位置における動態観測による実測値と FEM 解析結果を、(a)盛土法面小段の変位量、(b)盛土内の沈下量、(c)過剰間隙水圧について比較したものである。Sandhu 流による解析結果と HPM による解析結果を

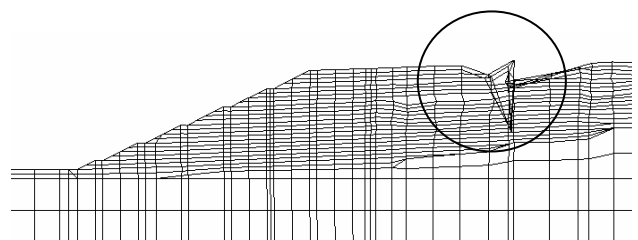


図-14 変形図 (FVM を用いたプログラムの場合)

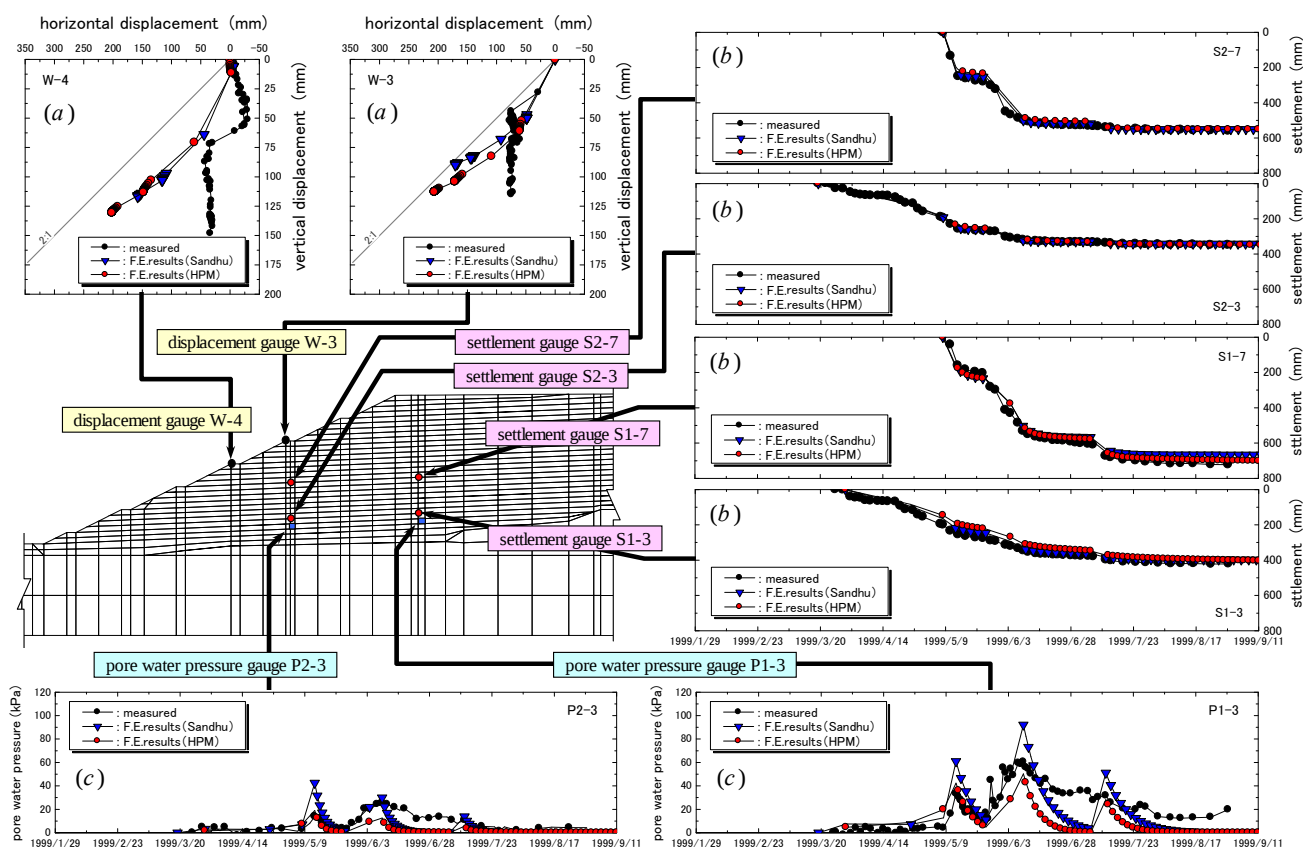


図-15 FEM 解析結果と実測値の比較

比較すると、離散点の違いによる差が若干見られるが、どちらの解析結果も動態観測による実測値を十分に再現できており、計算精度に大きな違いは見られない。

5. おわりに

本研究では、Christian 流の代表である赤井・田村による水頭の空間離散化式に対して、有限体積法 (FVM) の考え方を用いて一般的なメッシュへの正しい拡張方法を示した。しかし FVM を用いて拡張した場合、節点における水頭値を近似によって求める必要があるため、これまで指摘されていたメッシュ分割方法への依存性の問題を完全に解決することができない。これは、一次元圧密シミュレーション結果からも明らかである。そこで水頭の空間離散化に、竹内らが提案したハイブリッド型ペナルティ法 (HPM) を適用することで、節点の水頭値を必要としない土-水連成有限要素解析手法を提案した。HPM を組み込んだプログラムによる一次元圧密シミュレーションでは、メッシュ分割方法や透水係数の異方性に関わらず、理論解と一致する結果が得られ、メッシュ分割方法への依存性を回避できている。また、人工水平排水材を敷設した試験盛土の FEM 再現解析では、メッシュ分割方法への依存性から計算が発散する従来の問題点が、HPM を用いることによって解決できることがわかった。また、節点に水頭値を代表させる Sandhu 流による解析結果と比較

しても十分な計算精度を有しており、HPM を適用したプログラムの有効性が確認できた。

冒頭で述べたように、要素重心で水頭を代表させる Christian 流と、節点で水頭を代表させる Sandhu 流の違いは、内挿関数の選び方に起因した見かけ上のことであって両者に本質的な差異はない。どちらの手法を使用するかは、技術者の判断に委ねられる。しかしながら、今回検討の対象とした土-水連成有限要素解析プログラム DACSAR に限らず、Christian 流を用いた土-水連成有限要素解析プログラムは現在でも広く用いられており、これらのプログラムでは本報で示したようなメッシュ分割方法への依存性の問題を抱えている可能性がある。近年のコンピュータの急速な発展により、より複雑なメッシュや境界条件を用いた解析事例が増えてきており、本報で示したような問題が現れることが予想されるため、解析を実施する際には注意が必要である。

参考文献

- 1) Biot, M.A. : General Theory of Three-dimensional Consolidation, Journal Appl. Phys., Vol.12, pp.155-164, 1941.
- 2) Christian, J. T. : Undrained stress distribution by numerical method, Proc. ASCE, Vol.96, SM6, pp.1333-1345, 1968.
- 3) Sandhu, R. and Wilson, E. L. : Finite element analysis of flow in saturated porous media, Proc. ASCE, Vol.95, EM3,

- pp.641-652, 1969.
- 4) Iizuka, A. and Ohta, H. : A deformation procedure of input parameters in elasto-viscoplastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, pp.71-87, 1987.
 - 5) 赤井浩一, 田村武 : 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, *土木学会論文報告集*, No.269, pp.95-104, 1978.
 - 6) 竹山智英, 飯塚敦, 太田秀樹 : 一次関数近似を用いた水頭の空間離散化, 第 41 回地盤工学研究発表会, pp.321-322, 2006.
 - 7) 竹内則雄, 矢田敬, 草深守人, 武田洋 : ペナルティを用いた浸透流問題の解析手法の開発, *計算工学会論文集*, Vol.2, pp.179-185, 2000.
 - 8) 平田昌史, 藤山哲雄, 竹山智英, 飯塚敦, 太田秀樹 : 赤井・田村(1978)による水頭の空間離散化手法の拡張と適用限界, 第 44 回地盤工学研究発表会, pp.853-854, 2009.8.
 - 9) 平田昌史, 藤山哲雄, 竹山智英, 飯塚敦, 太田秀樹 : ハイブリッド型ペナルティ法を用いた土/水連成有限要素解析, 第 44 回地盤工学研究発表会, pp.855-856, 2009.8.
 - 10) 平田昌史, 藤山哲雄, 竹山智英, 飯塚敦, 太田秀樹 : HPM を用いた土/水連成有限要素解析における水頭の空間離散化, *土木学会, 応用力学論文集*, vol.12, pp.187-194, 2009.
 - 11) 鷺津久一郎 : 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972.
 - 12) 長原久克, 鶴山直義, 今井努, 伊藤雅夫, 石黒健, 藤山哲雄, 太田秀樹 : 人工排水材を用いた空港盛土の挙動解析, *ジオシンセティックスシンポジウム論文集*, 第 15 巻, pp.59-67, 2000.
 - 13) Nagahara,H., Takeda,H., Tsuruoka,N., Imai,T., Ishiguro,T., Fujiyama,T., Itoh,M. and Ohta,H. : Behavior of high airport embankment with geotextile horizontal drain, *Proc. of 7th International Conference on Geosynthetics, IGS*, pp.1051-1054, 2002.
 - 14) Sekiguchi,H. and Ohta,H. : Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equation of Soils, Proc. Specialty, Session 9, 9th Int. Conf. Soil Mech. & Found. Engrg. Tokyo*, pp.306-315, 1977.
 - 15) 竹山智英, 太田秀樹, 飯塚敦, Pipatpongsa Thirapong, 大野進太郎: 関口・太田モデルにおける特異点処理法, 第 3 回地盤工学会関東支部研究発表会講演集, pp.313-317,2006.
 - 16) Hashiguchi,K. : Subloading surface model with unconventional plasticity, *Int. J. Solids Structures*, 25, pp.917-945, 1989.